

С.В. Шипунов

**СТАТИСТИКА
ПАЛЕОМАГНИТНЫХ ДАННЫХ**

$$F(\varphi) = \frac{e^k - e^{k\cos\varphi}}{e^k - e^{-k}}$$



РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ГЕОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES
GEOLOGICAL INSTITUTE



S.V. Shipunov

**STATISTICS
OF PALEOMAGNETIC DATA**

Lectures

Transactions, vol. 527
Founded in 1932

Responsible editor
G.Z. Gurary

Moscow
GEOS
2000

С.В. Шипунов

**СТАТИСТИКА
ПАЛЕОМАГНИТНЫХ ДАННЫХ**

Лекции

Труды, вып. 527
Основаны в 1932 году

Ответственный редактор
Г.З. Гурарий

Москва
ГЕОС
2000

ББК 550.380
Ш 62
УДК 550.384

Шипунов С.В.

**Статистика палеомагнитных данных. – М.: ГЕОС, 2000. – 80 с.
(Тр. ГИН РАН; Вып. 527)**

ISBN 5-89118-194-0

Содержание лекций затрагивает круг методических вопросов палеомагнитного анализа, заключающихся в выделении, датировании и обосновании надежности палеомагнитных направлений.

Для палеомагнитологов.

Табл. 5. Ил. 13. Библ. 82 назв.

Редакционная коллегия:

*Ю.Г. Леонов (главный редактор), М.А. Ахметьев,
Ю.О. Гаврилов, Ю.В. Карякин, С.А. Куренков, М.А. Семихатов*

Рецензенты:

М.Л. Баженов, Д.В. Коваленко

Shipunov S.V.

**Statistics of paleomagnetic data. – Moscow: GEOS, 2000. – 80 p.
(Transactions GIN RAS; Vol. 527)**

The lectures touch upon methodical problems of paleomagnetic analysis that are separation, dating and evidence of reliability of paleomagnetic data.

For paleomagnetologists.

Tabl. 5. Il. 13. Bibl. 82 titles.

Editorial Board:

*Yu.G. Leonov (Editor-in-Chief), M.A. Akhmetiev, Yu.O. Gavrilov, Yu.V.
Kariakin, S.A. Kurenkov, M.A. Semikhatov*

Reviewers:

M.L. Bazhenov, D.V. Kovalenko

ББК 550.380
ISBN 5-89118-194-0

© С.В. Шипунов, 2000
© ГЕОС, 2000

Содержание

Предисловие _____

Лекция 1
Распределения
на сфере _____

Лекция 2
Оценки направлений _____

Лекция 3
Проверка гипотез _____

Лекция 4
Численное
моделирование _____

Лекция 5
Еще несколько примеров

Послесловие _____

Литература _____

```
Program Paleo_Statistics;
```

```
Uses x_Trig, x_Paleo;
```

```
{ Sqrt - квадратный корень  
  Random - случайное число на (0,1)  
  ArcCos - арккосинус  
  Grade - радианы в градусах }
```

```
Const r_:Array[6..20] of Real=(0.64,0.60,0.56,  
                                0.53,0.50,0.48,0.46,0.44,0.43,0.41,  
                                0.40,0.39,0.38,0.37,0.36);
```

```
Type Data = Array[1..20] of Real;
```

```
Var j,n : Integer; D,I,x,y,z : Data;  
    C,NC : Boolean; x0,y0,z0,r,r_,fi : Real;
```

```
BEGIN
```

```
{ Ввод данных (x, y, z) объемом "n" }  
{ Оценка среднего направления }  
x0:=0; y0:=0; z0:=0;  
for j:=1 to n do  
begin  
  x0:=x0+x[j]; y0:=y0+y[j]; z0:=z0+z[j];  
end;  
r:=Sqrt(x0*x0+y0*y0+z0*z0);  
x0:=x0/r; y0:=y0/r; z0:=z0/r;
```

```
{ Проверка гипотезы о равномерности }  
if r>r_[n] then C:=False else C:=True;
```

```
{ Модель равномерного распределения }  
for j:=1 to n do begin D[j] := 360*Random;  
  I[j] := 90-Grade(ArcCos(1-2*Random)); end;
```

```
{ Направление перемещения (0,0,1) }  
fi:=Grade(ArcCos(x0*0+y0*0+z0*1));  
if fi<25.8 then NC:=False else NC:=True;
```

```
write(' Тест Рэля '); { Результаты }  
if C then writeln('положителен')  
  else writeln('отрицателен!');  
write(' Новый тест галек ');  
if NC then writeln('положителен')  
  else writeln('отрицателен!');
```

```
END.
```



Однако он имеет и слабости, о которых я должен сказать тебе, не в предосуждение господину ученому, но для того, чтоб ты, зная об них, не дивился и не огорчил тем доброго старика; именно: он страстно влюблен в метафизику, славянский язык и пуни. Все сии три предмета занимают его совокупно и без меры

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга адресована в первую очередь молодым палеомагнитологам, которые хотят разобраться в применяемых при палеомагнитных исследованиях статистических методах. Предполагается, что некоторые основы теории вероятностей и математической статистики читателям известны. В книге рассмотрены как совершенно элементарные вопросы, которые я читал, например, студентам-геологам, так и более трудные. Изложение, как бы выразился профессионал, ведется на “бытовом” уровне, но с разумной степенью строгости, и это сделано мной преднамеренно: ведь читателями являются палеомагнитологи. Многочисленные примеры, иллюстрирующие содержание, представлены с той же целью.

Наша статистика – это статистика направлений в трехмерном пространстве, статистика единичных векторов или, что то же самое, статистика точек на поверхности единичной сферы (т.е. концов единичных векторов).

Обычно, когда хотят применить статистическую обработку к имеющимся данным, формулируют математическую модель и в рамках этой модели работают. *Наша модель* рассматривает суперпозицию в общем случае нескольких совокупностей векторов. Каждая совокупность характеризуется средним направлением и разбросом вокруг среднего направления, т.е. некоторым распределением направлений в пространстве. Кроме того, длины векторов каждой совокупности также могут быть описаны некоторым вероятностным распределением. Однако часто полагают эти векторы единичной длины.

Основной результат, получаемый в ходе палеомагнитных исследований (*палеомагнитное определение*), представляет собой датированное направление древнего геомагнитного поля, осредненного на некотором сравнительно небольшом в геологическом масштабе времени временном интервале. Поэтому *основными* искомыми характеристиками являются: направление поля с характеристиками его точности и геологическое время,

которому соответствует это направление. Этим и определяется спектр используемых методов вычислительной статистики, позволяющих выделить из естественной остаточной намагниченности составляющие ее компоненты, датировать их и оценить точность определения средних векторов для палеомагнитных коллекций.

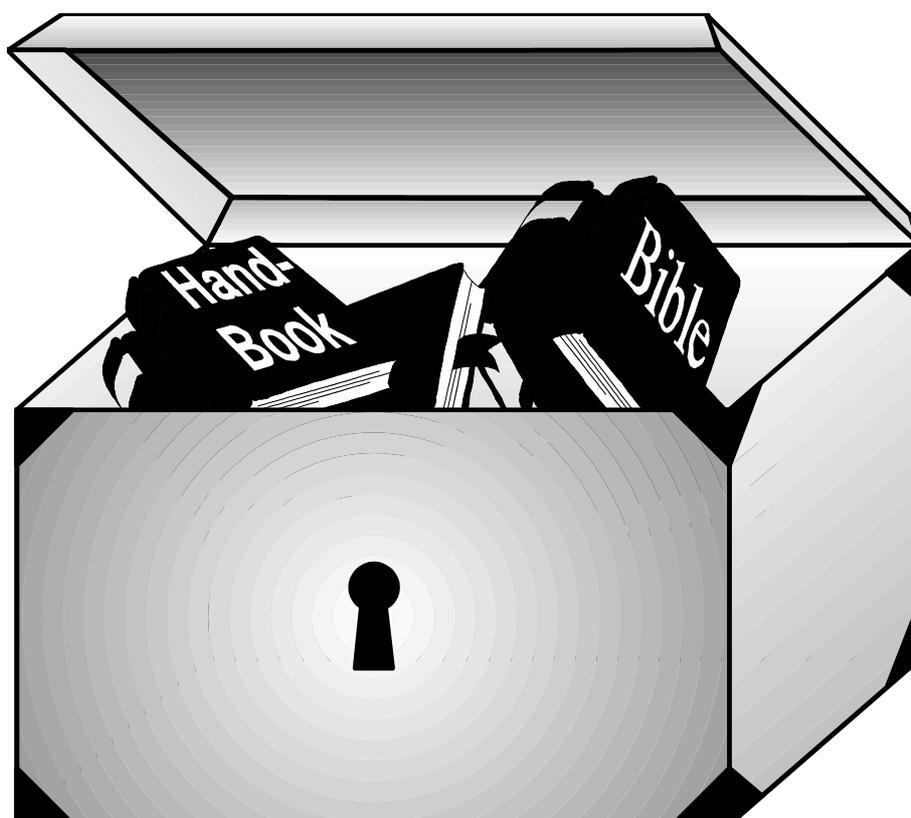
Все эпиграфы между главами заимствованы из романа “Российский Жилблз или Похождения князя Гаврилы Симоновича Чистякова” В.Т. Нарезного (1780-1825).

Благодарности

Я выражаю свою признательность руководителю научной школы Г.Н. Петровой (ОИФЗ РАН) за предоставленную возможность прочесть эту лекцию на семинаре “Физические основы палеомагнетизма” (Геофизическая обсерватория “Борок”, ОИФЗ РАН).

Особая благодарность моей дочери Кате за помощь в придумывании сюжетов для иллюстраций.

Работа выполнена при поддержке ФЦП “Интеграция” (проект № А0070).



*Чтоб хорошенько открыть истину, надобно
предварительно знать, как сделать начало к ее
открытию*

Лекция 1. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НА СФЕРЕ

Основа для применения статистических методов в палеомагнитологии была заложена в 1953 году выдающимся математиком – сэром Рональдом Фишером. С известной долей справедливости можно считать, что с 11-ти страничной статьи Р. Фишера зарождающаяся в те времена палеомагнитология стала претендовать на отнесение ее к разряду точных наук.

Р. Фишер рассмотрел названное впоследствии его именем распределение для векторов на сфере. Ниже приведены три формулы для *плотности распределения Фишера*.

$$f(\varphi, \psi) = C(\kappa) \exp(\kappa \cos \varphi) . \quad (1.1)$$

Здесь φ – радиальный угол, или угловое расстояние от центра распределения, ψ – азимутальный угол. Пределы изменения: – от 0 до π , ψ – от 0 до 2π . Коэффициент при экспоненте $C(\kappa)$ – нормировочный множитель, учитывающий, что интеграл по всей поверхности сферы равен единице.

Азимутальный угол, распределение которого равномерно на круге, не присутствует в этой формуле. Почему? Вообще говоря, плотности равномерных распределений на круге и на сфере, в отличие от других хорошо известных распределений как одномерных, так и распределений на сфере – уникальны; они не имеют параметров (например, в отличие от равномерного распределения на отрезке). Плотность равномерного распределения на круге выражается формулой $f_\psi = 1/2\pi$. Вот этим коэффициентом, скрытым в нормирующем множителе $C(\kappa)$, зависящем только от кучности, и входит азимутальный угол в формулу для плотности фишеровского распределения. Чтобы как-то выразить этот факт иногда для плотности распределения Фишера пишут:

$$f(\varphi, \psi) = f_\varphi(\varphi) f_\psi(\psi) .$$

В формуле (1.1) не присутствуют в явном виде координаты центра распределения, а только косинус углового расстояния от

центра. Координаты центра распределения можно выразить в декартовых или, используя формулы сферической тригонометрии, в сферических координатах и тогда мы получим две следующие формулы:

$$f(x,y,z) = C(\kappa) \exp[\kappa (x x_0 + y y_0 + z z_0)] \quad (1.2)$$

$$f(D,I) = C(\kappa) \exp\{\kappa [\sin I \sin I_0 + \cos I \cos I_0 \cos(D - D_0)]\} . \quad (1.3)$$

Здесь (x_0, y_0, z_0) и (D_0, I_0) – декартовы и сферические координаты центра распределения. В формуле (1.2) незримо присутствует условие единичности длин векторов.

В формулах плотности (1.1 – 1.3) греческой буквой κ обозначена кучность распределения Фишера, характеризующая степень концентрации векторов относительно центра распределения.

Если проинтегрировать плотность распределения Фишера (1.1) по φ , учитывая при этом, что элемент площади в сферических координатах выражается в виде $\sin \varphi d\varphi d\psi$, то получим для азимутального угла равномерное распределение на круге. Наоборот, если проинтегрировать по ψ , то получим для плотности радиального угла

$$f(\varphi) = C_1(\kappa) \exp(\kappa \cos \varphi) \sin \varphi . \quad (1.4)$$

Соответствующие *интегральные функции распределения* (или просто *функции распределения*) (рис. 1.1):

$$F(\psi) = \psi/2\pi , \quad (1.5a)$$

$$F(\varphi) = (\exp(\kappa) - \exp(\kappa \cos \varphi))/(\exp(\kappa) - \exp(-\kappa)) . \quad (1.5б)$$

Функции распределения определяют вероятность того, что величина, например φ , будет меньше заданного значения, и, соответственно, $F(\varphi = 0) = 0$ и $F(\varphi = \pi) = 1$. На рис. 1.1 представлены функции распределения (1.5a) и (1.5б).

Продифференцировав, например, (1.5б), получим формулу (1.4).

Вычислительные аспекты. Вычисляя функцию распределения по формуле (1.5б) для больших значений кучности, мы будем иметь при вычислении экспоненты очень большие числа, которые

обычно не могут быть размещены в отводимой компьютером памяти (произойдет так называемое переполнение порядка). Поэтому для компьютерных вычислений эта формула должна быть преобразована, например, делением на $\exp(\kappa)$ к такому виду:

$$F(\varphi) = \{1 - \exp[-\kappa (1 - \cos \varphi)]\} / [1 - \exp(-2\kappa)] . \quad (1.6)$$

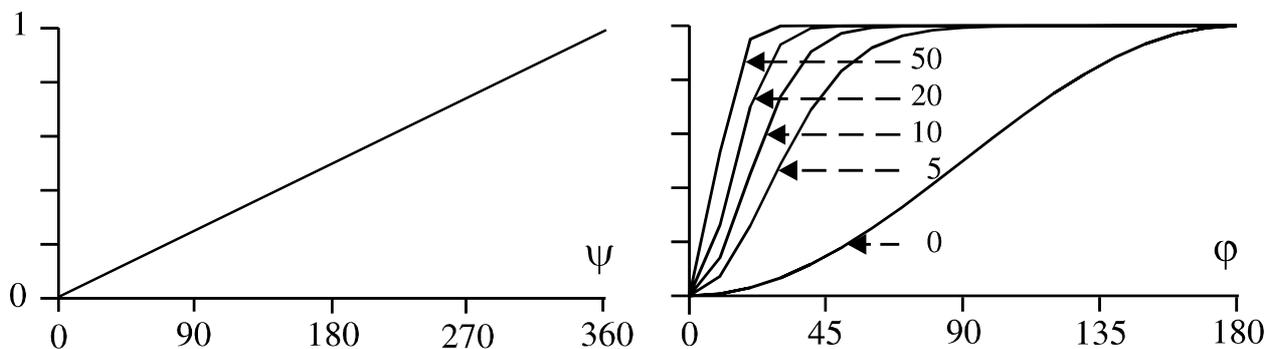


Рис. 1.1. Функции распределения азимутальной (ψ) и радиальной (φ) составляющих распределения Фишера (параметр кривых – кучность распределения векторов κ)

На сфере известно также *равномерное распределение*, которое суть распределение Фишера с нулевой кучностью. Можно показать, что для равномерного распределения функция распределения радиального угла выражается формулой

$$F(\varphi, \kappa = 0) = (1 - \cos \varphi) / 2 . \quad (1.7)$$

Известны более сложные распределения на сфере, чем распределение Фишера и равномерное (например, распределения Бингхема, Димрота-Ватсона, Кента). Необходимость в использовании подобных распределений возникает в тех случаях, когда имеются выборки векторов, например, несимметричные относительно центра распределения. Мы не будем останавливаться на них более подробно; отметим только, что основной *дескриптивной* характеристикой в этом случае является так называемая *матрица рассеяния* \mathbf{T} , которая определяет три *собственных числа* (λ_{\min} , λ_{int} , λ_{\max}) и соответствующие взаимно ортогональные *собственные векторы* (L_{\min} , L_{int} , L_{\max}) (см. пример 2.3 в следующей лекции). Матрица рассеяния для выборки векторов, представленных декартовыми координатами, выражается следующим образом:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \Sigma x^2 & \Sigma xy & \Sigma xz \\ \Sigma xy & \Sigma y^2 & \Sigma yz \\ \Sigma xz & \Sigma yz & \Sigma z^2 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

Собственные числа суть дисперсии относительно начала координат проекций исходных точек (концов векторов выборки) на соответствующий собственный вектор. Собственный вектор, соответствующий максимальному собственному значению, определяет направление, рассеяние вдоль которого для исходных данных максимально. Например, для распределения типа фишеровского, L_{\max} приблизительно совпадает со средним направлением для выборки, а для распределения векторов, представляющего две полярности намагниченности, – с направлением среднего вектора после предварительного приведения векторов к одной полярности. Соответственно L_{\min} определяет направление, рассеяние вдоль которого минимально. Для выборки векторов, например, представляющей “полосовое” распределение, L_{\min} является направлением нормали к большому кругу, аппроксимирующему исходные данные.

Номенклатура для табличных значений функций распределения. В статистической практике часто необходимы таблицы функций различных вероятностных распределений. Они нужны, например, при тестировании выдвигаемых в процессе исследования статистических гипотез. Критериальные статистики, используемые для этого, распределены, как правило, в соответствии с широко известными распределениями теории вероятностей. Поэтому критические области, при попадании в которые выборочного значения статистики нулевая гипотеза отвергается, принадлежат нижним и верхним хвостам этих распределений. Почти в каждой книге по статистике приведены таблицы процентилей (процентных точек), которые удовлетворяют следующим выражениям:

$$P(z > z_\alpha) = \alpha, \quad P(z < \zeta_\beta) = \beta. \quad (1.9)$$

Здесь z_α и ζ_β , соответственно, – верхняя и нижняя процентные точки; причем $\zeta_\beta = z_{1-\beta}$.

Однако использовать таблицы процентилей при вычислениях на компьютерах, не совсем удобно – для этого надо, во-первых, вводить в программы длинные массивы табличных данных, во-вторых, не всегда можно найти табличные значения процентилей для различного уровня значимости. В настоящее время существуют достаточно точные легкие в вычислениях аппроксимации большинства необходимых на практике распределений.

Пример 1.1. Для того, чтобы определить область, в которой заключено 95% точек для выборки из распределения Фишера с кучностью 30, приравняем выражение (1.6) к 0.95 и получим величину критического угла 26° . Аналогичным образом эта формула используется для определения радиуса доверительного круга для среднего направления фишеровской выборки (см. лекцию 2).

Задачи к лекции 1

1.1. Рассмотреть равномерное распределение для векторов на сфере, область определения которого ограничена кругом радиусом φ_0 . Показать, что интеграл от функции плотности

$$f(\varphi, \psi) = 1/[2\pi(1 - \cos\varphi_0)]$$

по поверхности сферы равен 1. Вывести формулы для плотности и функции распределения радиального угла (две следующие формулы, соответственно):

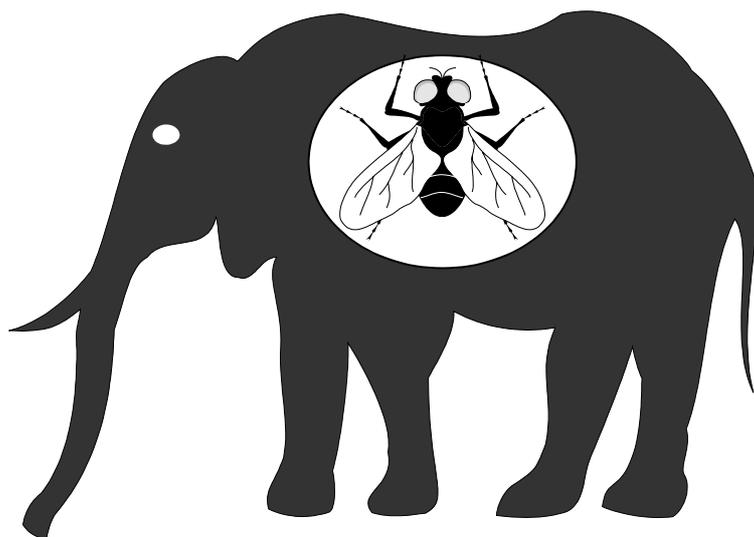
$$f(\varphi) = \sin\varphi/(1 - \cos\varphi_0), \quad F(\varphi) = (1 - \cos\varphi)/(1 - \cos\varphi_0)$$

Показать, что равномерное распределение на сфере (1.7) является частным случаем рассматриваемого распределения.

1.2. Рассмотреть функцию бимодального распределения Фишера с одинаковой кучностью обеих полярностей

$$F(\varphi) = 0.5 [(e^{\kappa} - e^{\kappa\cos\varphi})/(e^{\kappa} - e^{-\kappa}) + (e^{-\kappa\cos\varphi} - e^{-\kappa})/(e^{\kappa} - e^{-\kappa})].$$

Используя деление на e^{κ} , вычислить и построить график функции для $\kappa = 50$. Объяснить его поведение. Вывести формулы для плотности распределения.



– По крайней мере, – возразил князь, – ты что-нибудь да знаешь; а иногда из самой малости доходят люди до великих открытий. Неужели с тобой ничего-таки не случилось?

Лекция 2. ОЦЕНКИ НАПРАВЛЕНИЙ

Начнем эту лекцию с рассмотрения *метода наименьших квадратов* (МНК) для получения оценок среднего направления для выборки векторов. Можно было бы сразу заняться получением МНК оценок для векторов или проанализировать типичный пример линейной зависимости $y = ax + b$. Но с познавательной точки зрения интересно рассмотреть сначала самый простой случай, а именно: *определить среднее значение для выборки из N чисел.*

Конечно же, каждый школьник знает, что среднее, известное под названием *среднего арифметического*, выражается формулой $x_0 = (1/N) \sum x_i$. Попробуем дать какие-то правдоподобное определение среднему. Среднее, в некотором смысле, наиболее близко к числам имеющейся выборки и должно отражать в “среднем” имеющуюся выборку. Можно попробовать формализовать это определение. Рассмотрим выражение:

$$S = \sum (x_i - x_0)^2,$$

которое определяет сумму квадратов расстояний от некоторой точки x_0 до каждой точки имеющейся выборки. Если найти такое значение x_0 , которое минимизирует величину S , то это определение средней величины будет выполнено. Необходимым условием минимума является равенство нулю первой производной по неизвестному параметру; продифференцируем

$$dS/dx_0 = 2 \sum (x_i - x_0) = 0,$$

и, после раскрытия скобок, получим $\sum x_i = Nx_0$, или $x_0 = (1/N) \sum x_i$, т.е. известную со школы формулу.

Необходимое замечание. Может возникнуть вопрос: почему мы минимизировали сумму квадратов, а не какую-нибудь другую меру отклонения? Действительно, в качестве функции, определяющей степень отклонения исходных данных относительно искомой величины, может быть использована другая *метрика*, например, сумма абсолютных значений расстояний. Можно легко показать, и это оставляется читателям в

качестве приятного упражнения, что в этом случае мы приходим к *медиане*, т.е. расположенному посередине значению отсортированного списка исходных величин. Использование арифметического среднего определяется соображением удобства в вычислениях; кроме того, статистические понятия математического ожидания и дисперсии также приводят к суммам квадратов отклонений.

Определение среднего направления для совокупности векторов также можно свести к решению задачи методом наименьших квадратов. Пусть задана каким-либо образом мера отклонения эмпирических данных (векторов выборки) от теоретической модели. Для имеющейся совокупности векторов намагниченности моделью является искомое направление, которое в предположении однокомпонентности описывает направление геомагнитного поля, а мерой отклонения может служить, например, функция от неизвестного направления, отражающая степень различия между исходными векторами и искомым направлением.

Рассмотрим несколько примеров определения среднего направления для совокупности из N векторов. Все эти векторы, как это принято в палеомагнитологии, единичной длины. Каждый вектор определяется тремя декартовыми координатами x_i, y_i, z_i , где $i = 1, \dots, N$.

Пример 2.1. Требуется найти точку (x_0, y_0, z_0) , сумма квадратов расстояний от которой до исходных точек минимальна. Иначе говоря, требуется минимизировать функцию

$$S = \sum \{ (x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + (z_i - z_0)^2 \} . \quad (2.1)$$

Здесь в фигурных скобках представлен квадрат евклидова расстояния. В точке экстремума частные производные равны нулю. Поэтому продифференцируем функцию S по неизвестным параметрам и получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \partial S / \partial x_0 &= -2 \sum (x_i - x_0) = 0 \\ \partial S / \partial y_0 &= -2 \sum (y_i - y_0) = 0 \\ \partial S / \partial z_0 &= -2 \sum (z_i - z_0) = 0 , \end{aligned} \quad (2.2)$$

решая которую, имеем:

$$x_o = \Sigma x_i / N, \quad y_o = \Sigma y_i / N, \quad z_o = \Sigma z_i / N. \quad (2.3)$$

Можно показать, что в этой точке функция S достигает своего глобального минимума в трехмерном евклидовом пространстве.

Заметим, что длина полученного вектора

$$r = R/N = (1/N) \sqrt{(\Sigma x)^2 + (\Sigma y)^2 + (\Sigma z)^2} \leq 1,$$

причем равенство достигается при совпадении всех исходных векторов (иными словами, полученная точка, как правило, лежит внутри единичной сферы).

Пример 2.2. В палеомагнитологии часто приходится решать задачи МНК с ограничениями. Рассмотрим предыдущую задачу, но решение будем искать на единичной сфере, т.е. при условии

$$x_o^2 + y_o^2 + z_o^2 = 1. \quad (2.4)$$

В этом случае задачу можно свести к *безусловной минимизации* так называемой *функции Лагранжа* (на это есть соответствующая теорема в математическом анализе):

$$S = \Sigma \{ (x_i - x_o)^2 + (y_i - y_o)^2 + (z_i - z_o)^2 \} - \lambda (x_o^2 + y_o^2 + z_o^2 - 1). \quad (2.5)$$

Здесь λ – неизвестный *множитель Лагранжа*. После дифференцирования по неизвестным параметрам получим систему

$$\begin{aligned} \partial S / \partial x_o &= -2 \Sigma (x_i - x_o) - 2 \lambda x_o &= 0 \\ \partial S / \partial y_o &= -2 \Sigma (y_i - y_o) - 2 \lambda y_o &= 0 \\ \partial S / \partial z_o &= -2 \Sigma (z_i - z_o) - 2 \lambda z_o &= 0 \\ \partial S / \partial \lambda &= (x_o^2 + y_o^2 + z_o^2 - 1) &= 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

решая которую, имеем

$$x_o = \Sigma x_i / (N - \lambda), \quad y_o = \Sigma y_i / (N - \lambda), \quad z_o = \Sigma z_i / (N - \lambda).$$

В соответствии с условием (2.4) $\lambda = N - R$ и, следовательно

$$x_o = \Sigma x_i / R, \quad y_o = \Sigma y_i / R, \quad z_o = \Sigma z_i / R. \quad (2.7)$$

Необходимое замечание. В рассмотренном примере было использовано необходимое условие минимума функции. Но необходимое условие максимума функции такое же. Так минимум или максимум был найден? Для этого, строго говоря,

получив соответствующую оценку, необходимо исследовать и вторые производные. Например, в примере 2.2, подставляя условие нахождения решения на поверхности единичной сферы для определения множителя Лагранжа и извлекая квадратный корень, мы использовали одно из двух возможных решений. Второе решение

$$x_0 = -\sum x_i/R, \quad y_0 = -\sum y_i/R, \quad z_0 = -\sum z_i/R$$

определяет точку максимума, т.е. наиболее удаленную от исходных данных точку на поверхности единичной сферы.

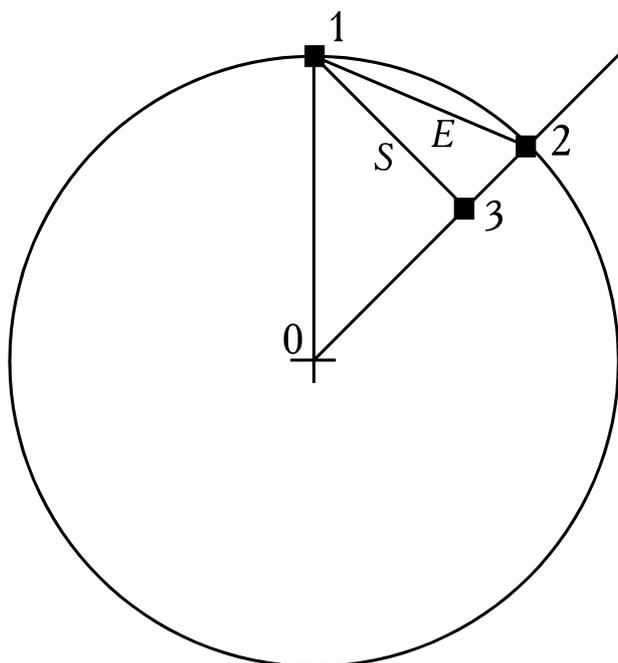


Рис. 2.1. Иллюстрация применения различных метрик для оценки расстояния между двумя векторами

E – евклидово расстояние между точками 1 и 2; S – метрика, связанная со скалярным произведением (расстояние от точки 1 до направления между точками 0 и 2)

Пример 2.3. В предыдущих двух примерах в качестве метрики использовалось евклидово расстояние (рис 2.1). В качестве параметра, характеризующего сходимость данных, можно рассмотреть также и другие метрики, например метрику, связанную со скалярным произведением векторов, например синус угла между искомым направлением и каждым исходным вектором.

В этом случае минимизация функции

$$\Sigma\{1 - (x_0x_i + y_0y_i + z_0z_i)^2\} = N - \Sigma(x_0x_i + y_0y_i + z_0z_i)^2$$

равносильна поиску максимума функции

$$S = \Sigma(x_0x_i + y_0y_i + z_0z_i)^2 . \quad (2.8)$$

Нулевой вектор является тривиальным решением данной задачи, поэтому необходимо искать решение при условии (2.4), т.е. искать максимум функции Лагранжа

$$S = \Sigma(x_0x_i + y_0y_i + z_0z_i)^2 - \lambda(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 1) . \quad (2.9)$$

Дифференцирование по неизвестным параметрам сведет задачу к *проблеме собственных значений*, возникающей также при отыскании решения методом пересечения больших кругов, т.е. к решению системы однородных уравнений

$$\begin{aligned} x_0(\Sigma x^2 - \lambda) + y_0 \Sigma xy + z_0 \Sigma xz &= 0 \\ x_0 \Sigma xy + y_0(\Sigma y^2 - \lambda) + z_0 \Sigma yz &= 0 \\ x_0 \Sigma xz + y_0 \Sigma yz + z_0(\Sigma z^2 - \lambda) &= 0 . \end{aligned} \quad (2.10)$$

Собственный вектор, соответствующий максимальному собственному значению, будет являться искомым решением. Заметим только, что однородная система линейных уравнений имеет решение при условии равенства нулю ее определителя. Это необходимое и достаточное условие и используется при поиске решения.

Следует отметить, что оценки направления среднего вектора, полученные в первых двух примерах, совпадают.

Третья оценка, связанная со скалярным произведением векторов, несколько отличается от первых двух, но эти различия невелики, особенно при больших значения кучности, т.е. при значениях кучности, обычно используемых при палеомагнитных исследованиях (например, $k > 10 - 20$).

Метод наименьших квадратов наиболее часто используется при различного рода оценках векторов в палеомагнитологии. Рассмотренных примеров по применению МНК для оценок палеомагнитных векторов вполне достаточно для того, чтобы читатель мог сам начать ставить и решать задачи, например, такие, как выделение компонент по результатам магнитных

чисток палеомагнитных образцов, т.е. определение направления разрушаемой намагниченности, определение пересечения больших кругов (кругов перемагничивания), оценка пересечения малых кругов и др.

Не всегда МНК приводит к линейным уравнениям, решения которых могут быть доведены до формулы. Но имеется большое количество численных методов поиска экстремума, которые могут быть использованы в таких случаях.

Существует еще один часто применяемый в статистике способ получения оценок, использующий знания о виде распределения, например, плотности распределения Фишера для векторов. Этот способ носит название *метод максимального правдоподобия* (ММП).

Для получения оценки неизвестного параметра естественно пытаться найти такое его значение, при котором вероятность реализации имеющейся в наличии выборки была бы максимальна.

Пусть x_1, \dots, x_N – случайные переменные выборки, взятой из генеральной совокупности, имеющей плотность распределения $f(x, \Theta)$, вид которой полагается известным. Необходимо найти неизвестный параметр Θ распределения $f(x, \Theta)$ по имеющейся выборке.

Вероятность события, заключающегося в том, что отдельное значение выборки, скажем x_i , попадает в интервал $(x_i - \varepsilon/2, x_i + \varepsilon/2)$, равна приблизительно $f(x_i) \varepsilon$, а вероятность того, что первое значение попадет в первый интервал, второе – во второй и т.д., задается выражением

$$P = f(x_1) f(x_2) \dots f(x_N) \varepsilon^N. \quad (2.11)$$

разделив обе части равенства на ε^N и взяв натуральный логарифм, получим

$$L = \ln (P/\varepsilon^N) = \sum_{i=1}^N \ln [f(x_i)]. \quad (2.12)$$

Последняя функция известна как *функция правдоподобия* (или логарифм функции правдоподобия). Метод максимального правдоподобия заключается в выборе неизвестного параметра Θ , приводящего к максимальному значению функцию правдоподобия.

Пример 2.4. Пусть $x_i, y_i, z_i, i = 1, \dots, N$ – выборка единичных векторов из распределения Фишера, имеющего функцию плотности

$$(\kappa/4\pi \operatorname{sh} \kappa) \exp \{ \kappa(x x_0 + y y_0 + z z_0) \}, \kappa > 0. \quad (2.13)$$

Здесь, как и раньше (1.2), использована замена $\cos \varphi$ в обычно используемой формуле для плотности распределения Фишера на его выражение через скалярное произведение единичных векторов и нормировочный множитель $C(\kappa)$ записан в явном виде.

$$\text{Обозначим } R_x = \sum x_i, R_y = \sum y_i, R_z = \sum z_i, R^2 = R_x^2 + R_y^2 + R_z^2.$$

Тогда логарифм функции правдоподобия для (2.13) примет вид:

$$\ln L = \text{const} + N \ln \kappa - N \ln(\operatorname{sh} \kappa) + \kappa(x_0 R_x + y_0 R_y + z_0 R_z), \quad (2.14)$$

$$\text{где } x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1. \quad (2.15)$$

Необходимо найти максимум функции правдоподобия (2.14) при условии (2.15). Поэтому напомним, как и в примерах 2.2 и 2.3, функцию Лагранжа

$$\text{const} + N \ln \kappa - N \ln(\operatorname{sh} \kappa) + \kappa(x_0 R_x + y_0 R_y + z_0 R_z) - \lambda(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 1).$$

Возьмем частные производные по неизвестным параметрам x_0, y_0, z_0, λ и приравняем их нулю:

$$\begin{aligned} \partial \ln L / \partial x_0 &= \kappa R_x - 2\lambda x_0 &= 0 \\ \partial \ln L / \partial y_0 &= \kappa R_y - 2\lambda y_0 &= 0 \\ \partial \ln L / \partial z_0 &= \kappa R_z - 2\lambda z_0 &= 0 \\ \partial \ln L / \partial \lambda &= (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что

$$x_0 = \kappa R_x / 2\lambda, \quad y_0 = \kappa R_y / 2\lambda, \quad z_0 = \kappa R_z / 2\lambda,$$

и, учитывая условие (2.15), имеем в результате $x_0 = R_x / R, y_0 = R_y / R, z_0 = R_z / R$.

Таким образом, оценка генерального среднего направления для распределения Фишера, полученная методом максимального правдоподобия, совпадает с оценкой методом наименьших квадратов с ограничением (пример 2.2). Еще раз отметим принципиальное различие в применении этих двух методов. В методе наименьших квадратов никак не используются априорные знания о виде распределения единичных векторов, тогда как в функцию правдоподобия явным образом входит плотность распределения Фишера (2.13).

Пример 2.5. Найдем оценку максимального правдоподобия для второго параметра распределения Фишера – кучности κ . Возьмем частную производную от логарифма функции правдоподобия (2.14) по этому неизвестному параметру

$$\partial \ln L / \partial \kappa = N/\kappa + (x_0 R_x + y_0 R_y + z_0 R_z) - N(\ln(\operatorname{sh} \kappa))' = 0.$$

Заметим, что производная от $\ln(\operatorname{sh} \kappa)$ есть $\operatorname{cth} \kappa$, и, используя оценку для среднего направления, полученную в предыдущем примере, получим выражение, определяющее кучность

$$r = R/N = \operatorname{cth} \kappa - 1/\kappa = \mathbf{L}(\kappa). \quad (2.16)$$

Последняя функция носит название функции Ланжевена. Для больших r ($r > 0.9$ и κ , соответственно, > 10) гиперболический котангенс приблизительно равен единице и оценку максимального правдоподобия можно выразить в явной форме относительно кучности

$$\kappa = N/(N - R) = 1/(1 - r). \quad (2.17)$$

Замечание. Можно заметить, что суммарный вектор выборки векторов из распределения Фишера полностью определяет само распределение. Например, его направление характеризует центр, а длина – кучность распределения. Ниже будет показано, что конус доверия для направления среднего вектора также определяется длиной суммарного вектора. Существует понятие *достаточной статистики*, которое и определяет это свойство оценки. Конечно же, сама выборка также является достаточной статистикой.

Свойства оценок. Различают следующие свойства оценок параметров распределений. Оценка неизвестного параметра может быть *несмещенной*; тогда математическое ожидание оценки равно точному значению параметра ($\Theta = \Theta_0$). Оценки, полученные методом наименьших квадратов, как правило, являются несмещенными. Оценки максимального правдоподобия нередко бывают смещенными (аналогично оценке дисперсии одномерного нормального распределения). Однако это смещение можно в некоторых случаях устранить.

Оценка, кроме того, должна быть *состоятельной*. *Состоятельность* описывает поведение точечной оценки при неограниченном росте числа наблюдений. Состоятельная оценка при увеличении размера выборки до бесконечности сходится по вероятности к истинному значению параметра, т.е. для сколь угодно малой величины $\varepsilon > 0$ вероятность того, что величина оценки отличается от истинного значения параметра меньше, чем на ε , стремится к единице. Поэтому для состоятельной оценки, построенной на основе большого числа наблюдений, вероятность того, что значение оценки будет сильно отличаться от истинного значения, достаточно мала.

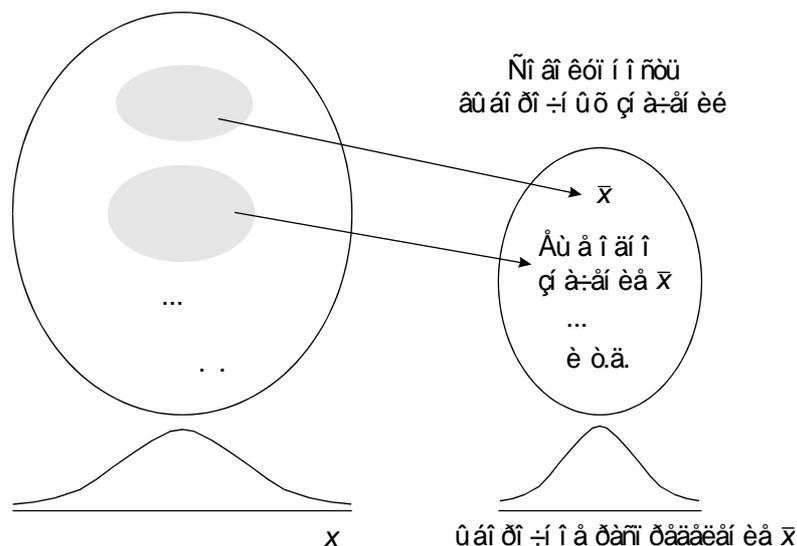


Рис. 2.2. Извлечение выборок из генеральной совокупности

Так как оценка вычислена по случайной выборке, то она сама также есть случайная величина, имеющая некоторый разброс возле истинного значения параметра (и имеет соответствующее

распределение). Поэтому истинный параметр несколько отличается от вычисленной по результатам наблюдений оценки (рис. 2.2).

Следовательно, было бы ошибкой приравнивать истинное значение параметра к численному значению оценки. Как правило, исследователь старается получить такую несмещенную оценку некоторого параметра распределения, дисперсия которой минимальна; такая оценка называется *эффективной*. МНК оценки – это оценки с наименьшей дисперсией, так как минимизируется сумма квадратов отклонения.

При сравнении оценок, включая *смещенные*, часто ориентируются на их *квадратичный риск*, который определяется как квадрат разности Θ и Θ_0 . Легко проверить, что эта величина равна сумме дисперсии оценки и квадрата смещения.

На рис. 2.3 в качестве примера показаны распределения трех конкурирующих оценок Θ_1 , Θ_2 , Θ_3 для одного параметра Θ .

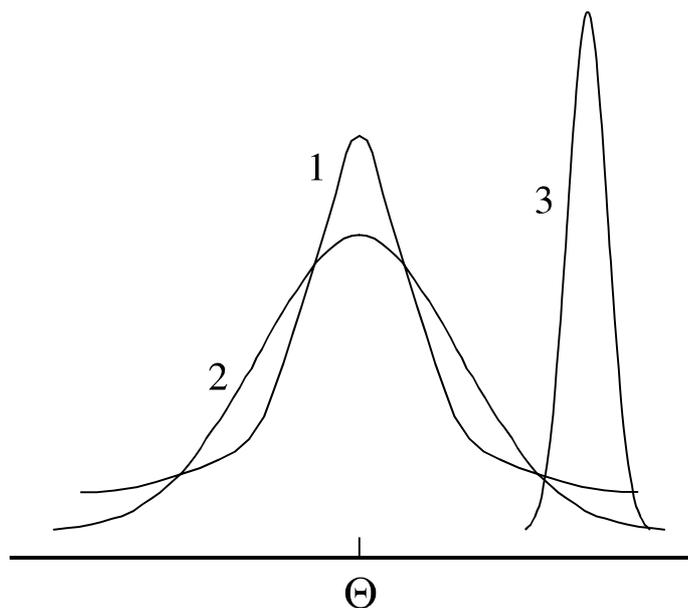


Рис. 2.3. Распределения трех вариантов оценок для одного параметра

Первые две – имеют преимущество перед Θ_3 в том смысле, что их математическое ожидание равно истинному значению параметра Θ . Оценка Θ_3 , напротив, смещена. Оценка Θ_1 предпочтительнее Θ_2 в том смысле, что в малой окрестности Θ плотность оценки Θ_1 больше плотности оценки Θ_2 , и, следовательно, она будет чаще принимать значения из этой близкой к истинному значению параметра окрестности. Но,

вместе с тем, на хвостах распределений Θ_1 и Θ_2 наблюдается обратная картина, и поэтому большие отклонения от Θ будут также чаще у оценки Θ_1 . Если обратить внимание на дисперсию оценок Θ_1 , Θ_2 , Θ_3 как на меру их разброса, то видно, что наименьшую дисперсию имеет оценка Θ_3 , т.е. она является наилучшей оценкой в этом смысле, но зато она смещена. Может оказаться, что *квадратичный риск* (квадратичный риск оценки равен сумме ее дисперсии и квадрата смещения) оценки Θ_3 будет меньше, чем для двух других.

В примере 2.5 приведены две оценки для кучности фишеровского распределения. Существуют и другие оценки этого параметра. Например, Дж. Ватсон в одной из своих работ проводит сравнительный анализ шести оценок кучности, в том числе, – таких:

$$k = N/(N - R) , \quad (2.18)$$

$$k = (N - 1)/(N - R) , \quad (2.19)$$

$$k = (N - 2)/(N - R) . \quad (2.20)$$

Первая из них – оценка максимального правдоподобия (см. пример 2.5) – является смещенной оценкой кучности. Вторая, обычно применяемая оценка, – также смещена. Наконец, третья из приведенных оценок кучности является несмещенной и имеет наименьшую дисперсию (даже для выборок малого объема). Однако для численных экспериментов Дж. Ватсон использовал оценку (2.19) по следующим причинам: 1) ее мода и медиана в среднем близки к истинному значению кучности; 2) она менее смещена, чем оценка (2.18); 3) формула (2.19) часто входит во многие теоретические выкладки; 4) обратная величина (2.19) является несмещенной оценкой обратной величины кучности.

Замечание относительно оценки палеомагнитных параметров. Рассмотренные в данном разделе виды оценок и их характеристики предполагают, что анализируемая совокупность векторов намагниченности однокомпонентна. В этом случае оценка среднего направления намагниченности приблизительно характеризует направление геомагнитного поля, в котором образовалась эта намагниченность. Напротив, если изучаемая

выборка векторов является суперпозицией, например, доскладчатой и послескладчатой компонент, то оценка среднего направления фиктивна и, независимо от объема выборки, не соответствует направлению реального геомагнитного поля. Последнее напрямую относится и к смещенным оценкам, про которые можно сказать: *“Смещенные оценки – стрельба из непристрелянного оружия”*.

Так как оценка центра фишеровского распределения в виде среднего вектора вычисляется, исходя из имеющихся данных, т.е. по случайной выборке, то она сама случайна и имеет некоторый разброс относительно истинного значения (или некоторое распределение). Оказывается, что средний вектор для выборки векторов из распределения Фишера с параметрами (μ, k) также распределен в соответствии с фишеровским распределением с тем же центром и кучностью, в R раз большей. Этот факт используется для определения доверительного круга для оценки среднего вектора. Радиус доверительного круга, в котором с 95%-ной вероятностью находится истинное направление центра распределения Фишера, может быть легко вычислен по формуле (1.6), подставив в нее вместо кучности величину $R(N - 1)/(N - R)$ и приравняв правую часть формулы к 0.95.

Замечания относительно вычисления направления разрушаемой в процессе магнитной чистки компоненты и метода пересечения кругов перемагничивания. В первом случае исходными данными являются измерения вектора намагниченности в ходе чистки и, следовательно, они не являются единичными векторами. Поиск решения проводится аналогично рассмотренному в примере 2.3, т.е. решается проблема собственных значений для матрицы рассеяния (1.8), приводящая к системе однородных уравнений (2.10). Собственный вектор, соответствующий максимальному собственному значению, является искомым решением.

При определении направления компоненты обычно вычисляется и мера доверия к нему (параметр точности MAD – *Maximum angular deviation*), характеризующая степень разброса исходных точек относительно полученной прямой. Так как

собственные значения являются дисперсиями вдоль трех ортогональных собственных векторов, то легко видно, что этот параметр, определяющийся формулой:

$$\text{MAD} = \arctg \{ [(\lambda_{\min} + \lambda_{\text{int}})/\lambda_{\max}]^{1/2} \},$$

характеризует угол φ на рис. 2.4.

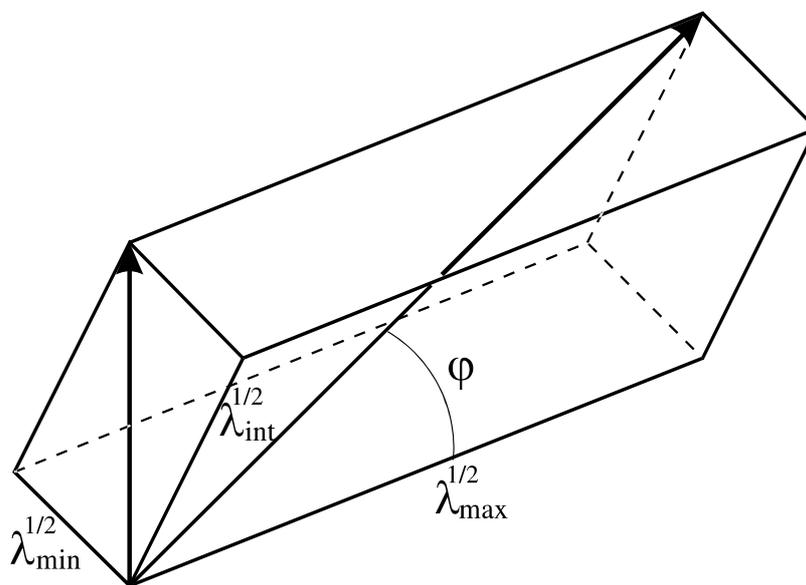


Рис. 2.4. Иллюстрация определения меры разброса исходных данных относительно направления выделенной компоненты

Выделение компонент по результатам магнитных чисток возможно в том случае, когда на некотором интервале размагничивающего воздействия разрушается только одна компонента, т.е. при неперекрывающихся спектрах размагничивания. Если же спектры размагничивания двух компонент похожи, то может наблюдаться так называемая кажущаяся однокомпонентность, или годограф разрушаемого вектора намагниченности будет близок к прямой (рис. 2.5).

В этом случае следует анализировать кривизну годографа, что не всегда возможно выполнить при визуальном анализе кривых Зийдервельда. Для этого существуют статистические методы, но, к сожалению, в настоящее время они мало применяются, так как требуют значительных изменений методики отбора палеомагнитных коллекций (например, отбора большего количества образцов, в том числе, – на каждом стратиграфическом уровне).

Метод пересечения кругов перемагничивания, работающий с двухкомпонентными системами, основан на различии в величинах кучности доскладчатой и послескладчатой компонент намагниченности, например, в древней системе координат.

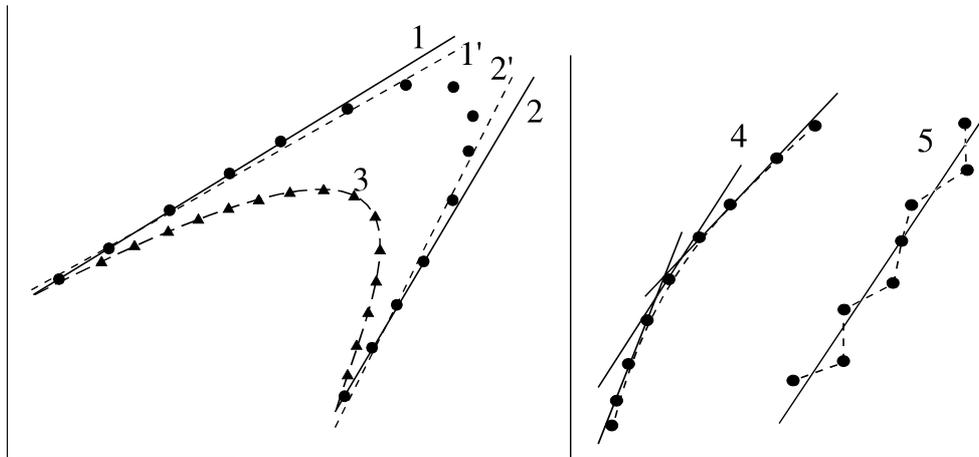


Рис. 2.5. Выделение компонент намагниченности по диаграммам Зийдервельда при различном перекрытии спектров размагничивания

Прямые 1' и 2' дают смещенное относительно истинных направлений (1 и 2) решение вследствие слишком большого значения предварительно заданной угловой ошибки. Для кривой 3 невозможно оценить истинное направление компонент. При слабой кривизне (4) возможно выделить компоненты с достаточно хорошей точностью, но их направления не соответствуют истинным. При неточных данных (5) разностные векторы между соседними точками и компоненты, полученные по непротяженным интервалам размагничивания, не отражают истинного направления компоненты намагниченности

Если кучность доскладчатой компоненты много больше, то пересечения кругов перемагничивания будут располагаться в некоторой компактной области, включающей истинное направление доскладчатой компоненты намагниченности. Однако в ряде случаев, при сопоставимых величинах кучностей до- и послескладчатой компонент намагниченности, определение направления доскладчатой компоненты этим методом дает смещенные оценки (рис. 2.6). Тем не менее, работая методом пересечения кругов перемагничивания, обычно получают оценку направления доскладчатой компоненты и должным образом не обосновывают истинность полученного направления.

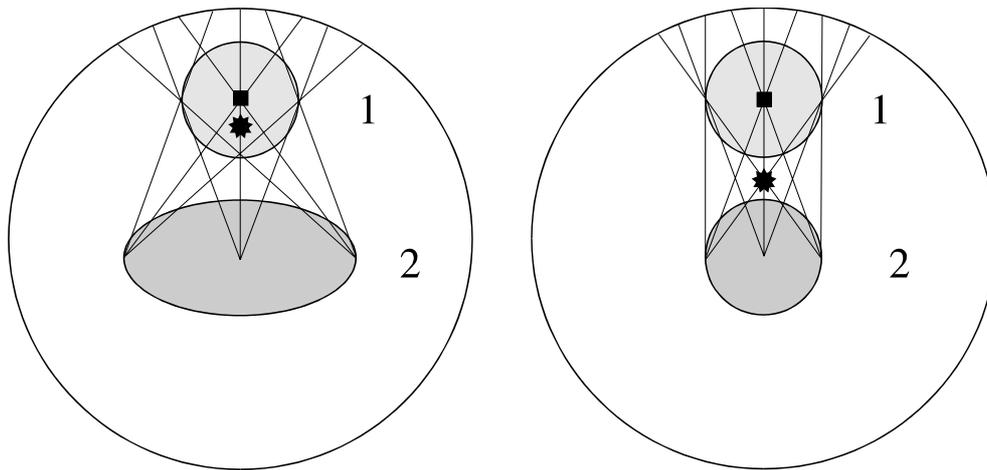


Рис. 2.6. Оценка направления доскладчатой компоненты намагниченности с помощью метода пересечения кругов перемагничивания при различных соотношениях кучностей до- и послескладчатой компонент

1, 2 – распределения до- и послескладчатой компонент в древней системе координат, соответственно. Квадрат и звездочка – истинное и оцененное направления доскладчатой намагниченности, соответственно

Предложены следующие способы решения этой проблемы.

1. Совместный анализ кругов перемагничивания и направлений компонент, полученных при компонентном анализе диаграмм Зийдервельда; при этом предполагается, что “осреднение” смещенных оценок метода пересечения кругов перемагничивания и результатов компонентного анализа должно привести к менее смещенным оценкам.

2. Анализ кругов перемагничивания с помощью численного моделирования для оценки смещения и введения соответствующей правки в результирующее направление.

3. Оценка направления методом пересечения прямых размагничивания на диаграммах Зийдервельда для коллекции образцов.

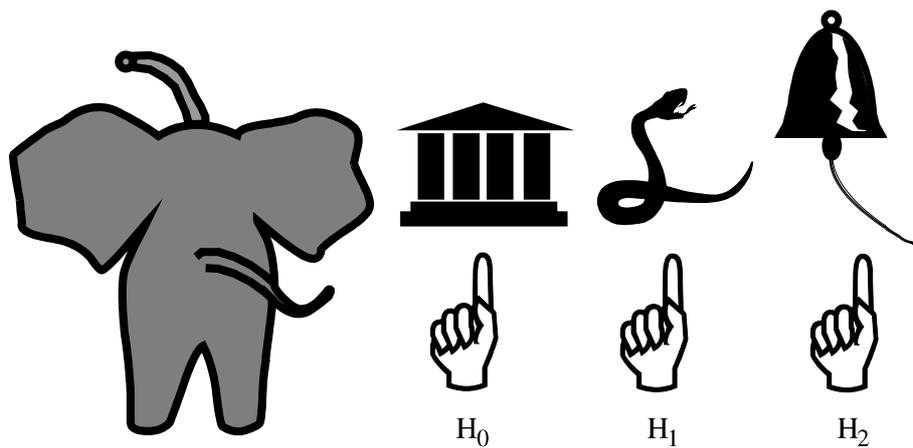
4. Применение процедур проверки гипотез к результату метода пересечения кругов перемагничивания (тестирование результата).

Таким образом, выделяя линейные отрезки на диаграммах Зийдервельда и определяя для них направляющие векторы (или находя решение методом пересечения кругов перемагничивания), палеомагнитолог ни в коей мере не гарантирован, что полученные направления представляют однокомпонентную по направлению намагниченность. Поэтому при дальнейшем

палеомагнитном анализе необходимы процедуры проверки гипотез.

Задача к лекции 2

2.1. Решить задачу поиска среднего направления для выборки единичных векторов, которое дает максимум суммарной проекции исходных векторов на искомое направление, т.е. найти точку максимума функции $S = \sum (xx_0 + yy_0 + zz_0)$. Сопоставить с решениями, полученными в примерах 2.1 – 2.3.



– Постойте, любезный друг, – сказал он, – я сделал только замечание, а не говорю, что открыл истину. Хотя опыты довольно меня научили, но нет точки в жизни, где б можно было скорее ошибиться

Лекция 3. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ

Проверка гипотез в палеомагнитологии – достаточно широко применяемая процедура для обоснования надежности палеомагнитных данных. Ниже будут даны общие сведения о тестировании статистических гипотез и затронуты процедуры, применяющиеся для датирования компонент намагниченности (полевые тесты).

Статистическая гипотеза – это утверждение относительно значений одного или более параметров распределения генеральной совокупности или о самой форме распределения. Под проверкой статистической гипотезы (или тестированием) понимается процедура, с помощью которой пытаются установить, следует ли принять утверждение, называемое нулевой гипотезой H_0 , или отвергнуть его. Обычно под нулевой гипотезой рассматривается некоторое выдвигаемое в ходе исследования высказывание (рабочая гипотеза). Справедливость нулевой гипотезы проверяется по имеющейся выборке, и если нулевая гипотеза и имеющиеся данные согласуются с большой степенью правдоподобия, то считается, что H_0 не противоречит им. В противном случае нулевая гипотеза отклоняется.

При выполнении процедуры проверки статистической гипотезы используют некоторую *подходящую* числовую величину (*статистику критерия*), для которой известна функция плотности при условии выполнении нулевой гипотезы H_0 . Предполагается, что, как правило, имеется качественная информация относительно того, какого типа отклонения от H_0 требуется выявить. Область, близкая к моде *нулевого распределения* статистики критерия (распределения статистики в случае истинности нулевой гипотезы), имеет высокую вероятность, тогда как хвосты распределения – это области малых вероятностей. Если величина критериальной статистики попадает в область нулевого распределения, имеющую большую вероятность, то можно сделать вывод о том, что выборка не противоречит проверяемой нулевой гипотезе (она согласуется с

H_0). Напротив, если наблюдается крайнее, почти невероятное при выполнении H_0 значение величины критерия, то это следует рассматривать как явное расхождение с H_0 .

Такая интерпретация результатов тестирования основана на общем принципе, гласящем, что предположение должно быть отвергнуто, если имеется противоречащий пример, но не обязательно должно быть принято, если такого примера найти не удалось. Представленное рассуждение является использованием закона контрапозиции в логике, в соответствии с которым для произвольных событий или высказываний **A** и **B**, если из **A** вытекает **B**, и не выполняется **B**, то несправедливо и **A**. В то же время, предложение “если из **A** следует **B**, и **B** выполняется, то также справедливо и **A**” является ложным, так как справедливость **B** может быть следствием не только выполнения **A**, но и в результате наступления другого события (например, **C**).

Пример 3.1. *Тест складки для двух крыльев.* Если намагниченность пород складки доскладчатая (событие **A**), то средние направления векторов намагниченности в стратиграфической (древней) системе координат для крыльев складки совпадут между собой (событие **B**). Если в результате проведения теста направления намагниченности окажутся различающимися (событие **B** не выполняется), то из этого следует, что намагниченность нельзя признать доскладчатой (отрицание **A**). Если же в результате проведения теста складки направления намагниченности будут признаны совпадающими, то это еще не означает доскладчатости намагниченности. Например, это может быть связано с малым различием в элементах залегания пластов для крыльев складки. В связи с этим, такой результат теста обычно интерпретируется как согласие с выдвинутой гипотезой, так как отсутствуют достаточные основания для ее фальсификации.

Пример 3.2. *Тест галек.* Если намагниченность в гальках образовалась до переотложения пород в виде конгломератов (событие **A**), то величина среднего вектора r будет сравнительно мала (событие **B**). Если при проведении теста галек окажется, что величина r велика, то это ведет к отрицанию события **A**. Вместе с

тем, если при тестировании выборочное значение статистики t мало, то это не означает справедливости нулевой гипотезы; такое значение выборочной статистики может быть обусловлено наличием, например, вторичной разнополярной компоненты намагниченности с приблизительно равным количеством образцов разной полярности.

Применительно к статистике принцип контрапозиции можно сформулировать следующим образом: если **В** есть вероятностное следствие **А**, то отрицание **А** будет являться вероятностным следствием отрицания **В**. Если в качестве суждения **А** взять высказывание “ H_0 верна”, а в качестве суждения **В** – “наблюдённое значение критериальной статистики, вероятно, близко к моде нулевого распределения”, то нулевая гипотеза, вероятно, не будет верна, если наблюдённое значение статистики критерия сильно удалено от моды нулевого распределения.

Пример 3.3. Сформулируем, в качестве примера, задачу проверки гипотезы о кучности по выборке, состоящей из двух векторов. Пусть эта выборка получена по двум галькам и мы хотим провести тест галек, т.е. проверить нулевую гипотезу H_0 : эти два вектора взяты из равномерного распределения на сфере (или, что то же самое, из распределения Фишера с кучностью $k = 0$). Конкурирующая (альтернативная) гипотеза H_1 пусть будет: $k > 0$. Необходимо сделать выбор между этими гипотезами на основании имеющейся выборки – двух независимо наблюдаемых векторов намагниченности.

Выберем в качестве статистики критерия величину угла φ между этими двумя векторами. На рис. 3.1, а приведено нулевое распределение φ , т.е. ее распределение при условии выполнения H_0 (см. также формулу (1.7)). В зависимости от того, в какую область на кривой распределения попадет выборочное значение угла φ , будет принята или отвергнута проверяемая гипотеза. Подмножество возможных значений φ , при попадании в которое будет принята нулевая гипотеза, называется *областью принятия нулевой гипотезы*. Дополнительная к ней область, при попадании в которую выборочного значения φ нулевая гипотеза отклоняется, называется *критической областью*, а ее граничное

значение *критическим*. Естественно, что эта область должна соответствовать малым значениям угла .

Критическая область (множество исходов, приводящих к отклонению нулевой гипотезы H_0) выбирается таким образом, чтобы была мала вероятность ошибки α отклонить H_0 в случае, когда она верна (эта ошибка называется *ошибкой 1-го рода*). Вероятность α , также называемая *уровнем значимости критерия*, обычно выбирается равной 0.05 или 0.01 (5 или 1%, соответственно).

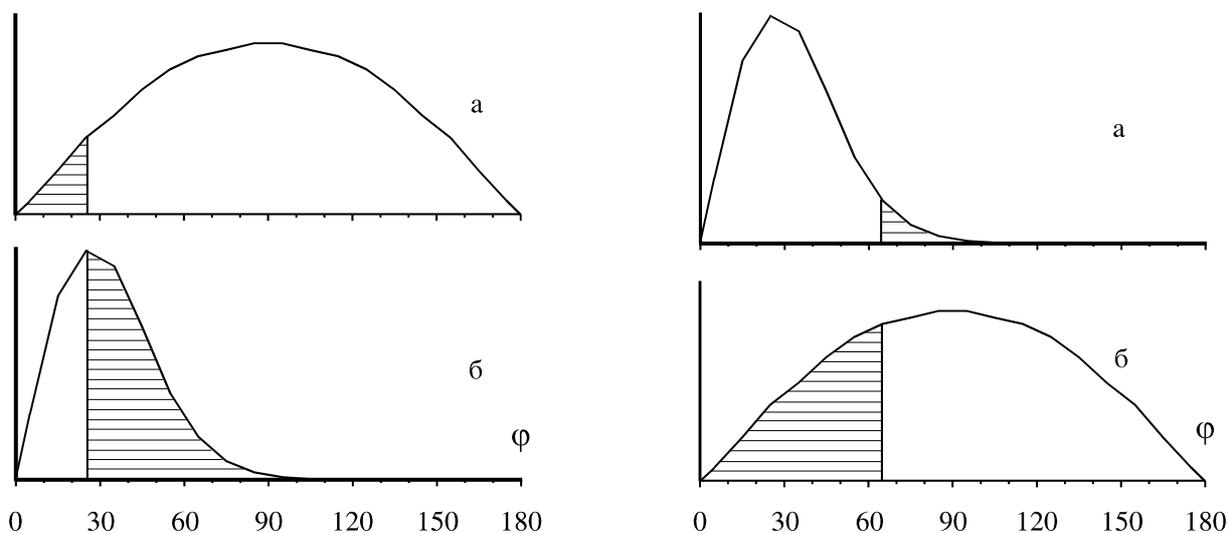


Рис. 3.1. Распределения угла между двумя векторами, извлеченными из равномерного распределения (а) и распределения Фишера с кучностью 10 (б) (пример 3.3)

Заштрихованы: на а – критическая область (область ошибки 1-го рода) и на б – область ошибки 2-го рода. Пояснения см. в тексте

Рис. 3.2. Распределения угла между двумя векторами, извлеченными из распределения Фишера с кучностью 10 (а) и равномерного распределения (б) (пример 3.4)

Заштрихованы: на а – критическая область (область ошибки 1-го рода) и на б – область ошибки 2-го рода. Пояснения см. в тексте

Пример 3.3. (продолжение). Для рассматриваемого примера критической областью с 5%-ным уровнем значимости будет множество значений $\varphi < \varphi^\# \approx 26^\circ$ (см. рис. 3.1, а). Если измеренное значение φ окажется меньше критического, нулевая гипотеза о равномерном распределении отвергается. Вероятность ошибочности этого вывода составит 5%.

Принять нулевую гипотезу H_0 , когда она ложна, значит совершить ошибку, которую называют *ошибкой 2-го рода* (вероятность этой ошибки обозначается β). Вероятность дополнительного события, т.е. правильного отклонения H_0 , называется *мощностью критерия* $\pi = 1 - \beta$.

Пример 3.3. (окончание). Оценим мощность критерия и вероятность ошибки 2-го рода для рассматриваемого примера проверки гипотезы о параметре кучности. Для этого необходимо строго сформулировать альтернативную гипотезу, т.е. знать величину кучности и соответствующее распределение критериальной статистики. Пусть на самом деле $k = 10$, а величина вычисленной статистики критерия φ больше критического значения, приблизительно равного 26° . На рис. 3.1, б представлено распределение угла φ , полученное численными делением, при $k = 10$, из которого видно, что $\varphi < \varphi^\#$ может наблюдаться приблизительно в 50% случаев. Мощность критерия для этого случая ($\alpha = 5\%$, $k = 10$) также примерно равна 50%.

Из рассмотренного примера можно сделать следующие выводы. При использовании этого критерия: а) в 5% случаев нулевая гипотеза о равномерности распределения будет отклонена ошибочно; б) в 50% случаев нулевая гипотеза будет ошибочно принята, если кучность распределения Фишера на самом деле составляет 10. Следует заметить, что увеличения мощности критерия при выбранном уровне значимости α можно добиться увеличением объема рассматриваемой выборки. Так, например, при $N = 10$ и $k = 10$ мощность критерия π близка к 100% (при $N > 2$ в качестве критериальной статистики используется нормализованная длина суммарного вектора $r = R/N$).

Пример 3.4. Рассмотрим те же данные, что и в примере 3.3, но в качестве нулевой гипотезы H_0 возьмем следующее высказывание: два вектора намагниченности взяты из распределения Фишера с кучностью $k = 10$. Альтернативная гипотеза H_1 : $k = 0$ (векторы равномерно распределены на сфере). Проверку такой нулевой гипотезы можно производить, например, в случае, когда эти два направления получены по двум образцам

из одного пласта и необходимо проверить, присутствует ли регулярное направление намагниченности. Заметим, что в этом примере по сравнению с примером 3.3 нулевая и альтернативная гипотезы поменялись местами. Как это скажется на результатах тестирования?

Нулевое распределение для этого случая представлено на рис. 3.2, а. Критическое множество значений φ будет располагаться в области больших величин. Критическое значение, при превышении которого нулевая гипотеза будет отклонена, $\varphi^{\#} \approx 65^{\circ}$. При отклонении H_0 вероятность ошибочности сделанного вывода составляет 5%. Мощность критерия (при $\kappa = 0$) составляет 72% (см. рис. 3.2, б).

В табл. 3.1 представлены критические значения статистик и величины ошибок 2-го рода для проверки гипотез в примерах 3.3 и 3.4 (выбранный уровень значимости в обоих случаях $\alpha = 5\%$).

Рассмотренные примеры иллюстрируют возможность различной формулировки нулевой гипотезы в зависимости от того, какой гипотезой исследователь дорожит. Различным отношением исследователя к выдвигаемым при тестировании нулевым гипотезам объясняется различие в величинах критических значений $\varphi^{\#}$, используемых для опровержения H_0 .

Таблица 3.1. Критические значения статистик и величины ошибок 2-го рода для проверки гипотез в примерах 3.3 и 3.4

H_0	$\varphi^{\#}$	H_1	β	π
$\kappa = 0$	26	$\kappa = 10$	50	50
$\kappa = 10$	65	$\kappa = 0$	28	72

Если интересуются как положительными, так и отрицательными отклонениями изучаемых величин, используются двухсторонние критерии. В этом случае учитывают вероятность попадания вычисленного значения критериальной статистики (при условии выполнения H_0) в оба конца кривой нулевого распределения. Например, если исследователь

использует уровень значимости $\alpha = 0.05$, достаточный, по его мнению, для проверки гипотезы, то верхнее критическое значение будет соответствовать $(1 - \alpha/2) = 0.975$; нижнее критическое значение соответствует $\alpha/2 = 0.025$.

Пример 3.5. Вернемся к рассматриваемому выше примеру. Пусть по-прежнему имеются два вектора и нулевая гипотеза: $\kappa = 0$. Заметим, что слишком малые и слишком большие углы φ между этими двумя векторами маловероятны. Причем углы, близкие к 180° могут наблюдаться при присутствии в горной породе намагниченности обратной полярности. Поэтому имеет смысл рассмотреть в качестве альтернативной гипотезы H_1 наличие регулярной компоненты (возможно, обеих полярностей). В этом случае критерий является двухсторонним, а критической областью, при попадании в которую измеренного угла нулевая гипотеза отвергается, являются хвосты нулевого распределения (см. рис. 3.1, а). Тогда нижнее критическое значение $\varphi_{\min}^{\#} \approx 17^\circ$; вероятность того, что измеренное значение φ будет меньше, равна 2.5%. Верхнее критическое значение $\varphi_{\max}^{\#} \approx 163^\circ$; вероятность того, что $\varphi > \varphi_{\max}^{\#}$, также равна 2.5%. Нулевая гипотеза H_0 : $\kappa = 0$ отвергается, если φ либо меньше $\varphi_{\min}^{\#}$, либо больше $\varphi_{\max}^{\#}$. Уровень значимости в этом случае 5%.

Рассмотрим типичную процедуру проверки гипотез на примере проверки гипотезы H_0 о равенстве средних направлений m выборок из распределений Фишера.

1. Выбирается уровень значимости: $\alpha = 0.05$.

2. Описывается статистическая модель: распределения m выборок векторов соответствуют распределению Фишера с одинаковой кучностью. Это означает, что перед проверкой гипотезы о равенстве средних, необходимо провести проверку гипотезы о соответствии каждой из m выборок распределению Фишера и проверку гипотезы о гомогенности этих выборок (равенства их кучностей). В случае удовлетворительных результатов этих двух тестов для m выборок выборочные распределения будут соответствовать принимаемой статистической модели.

3. Формулируются нулевая гипотеза \mathbf{H}_0 : средние направления m выборок векторов равны, и альтернативная гипотеза \mathbf{H}_1 : средние направления различаются.

4. Выбирается критериальная статистика, распределение которой известно (т.е. численная величина, вычисляемая по некоторой формуле, распределение которой известно в случае выполнения \mathbf{H}_0). Критериальная статистика для данного критерия:

$$F_m = \frac{(N-m)}{(m-1)} \cdot \frac{(\sum R_i - R^2 / \sum R_i)}{2(N - \sum R_i)}$$

распределена в соответствии с распределением отношения дисперсий (**F**-распределением) $\mathbf{F}[\nu_1, \nu_2, \alpha]$, где N – общее количество векторов в m выборках; R_i – длина суммарного вектора i -той совокупности; R – длина суммарного вектора объединенной выборки; $\nu_1 = 2(m-1)$ и $\nu_2 = 2(N-m)$ – степени свободы

F-распределения.

5. Определяется критическая область по таблицам процентных точек (критических значений) **F**-распределения с числом степеней свободы $\nu_1 = 2(m-1)$ и $\nu_2 = 2(N-m)$ и уровнем значимости α .

6. Вычисляется значение статистического критерия по наблюдаемым выборкам и делается вывод. Если полученное значение критерия лежит в критической области ($F_m > F^\#$), то следует отклонить нулевую гипотезу и принять альтернативную. В противном случае принять нулевую гипотезу. α равна вероятности отвергнуть \mathbf{H}_0 при условии, что \mathbf{H}_0 верна. β равна вероятности принять \mathbf{H}_0 при условии, что она ложна. В табл. 3.2 иллюстрируются возможные выводы и вероятности ошибок 1-го и 2-го рода для этого примера.

Опыт обычно не доказывает того, что та или иная нулевая гипотеза \mathbf{H}_0 справедлива – возможно лишь доказать ее неправоту. Чаще всего дается уклончивый ответ на вопрос о том, совместима ли \mathbf{H}_0 с наблюдениями или нет, и если результат

вычислений величины критерия имеет очень малую вероятность и попадает в критическую область, то это является более или менее определенным указанием на то, что H_0 необходимо отвергнуть. Неотрицательный ответ по H_0 не означает, что она лучшая или единственная. Она представляет собой одно из правдоподобных утверждений, а факты могут лишь опровергнуть выдвинутую H_0 , но не могут ее подтвердить.

Таблица 3.2. Интерпретация результатов и возможные ошибки при проверке гипотезы о равенстве средних

Принятое решение	В действительности	
	Средние равны	Средние не равны
Средние равны	Правильное решение Вероятность $1 - \alpha$	Ошибка 2-го рода Вероятность ошибки β
Средние не равны	Ошибка 1-го рода Вероятность ошибки α	Правильное решение Вероятность $\pi = 1 - \beta$

Таблица 3.3. Зависимость мощности критерия Рэлея от объема выборки и формулировки альтернативной гипотезы

N	$t = J_2/J_1$	π , % (мощность критерия)
10	0.5	25
20	0.5	50
30	0.5	80
10	1.0	100
20	1.0	100
30	1.0	100

Мощность критерия ($\pi = 1 - \beta$) при выбранном уровне значимости зависит от объема выборки N , и, увеличивая его, можно добиться увеличения мощности критерия и уменьшения вероятности ошибочного принятия нулевой гипотезы β . В табл. 3.3 приведены некоторые значения мощности критерия равномерности для векторов на сфере для различного содержания вторичной намагниченности ($t = J_2/J_1$) и объема выборки N . Величина относительного содержания вторичной

намагниченности определяет формулировку альтернативной гипотезы (кучность распределения). Мощность критерия Рэля настолько мало, что он способен определять присутствующую вторичную намагниченность либо при очень больших объемах коллекций галек ($N > 30$), либо при величине вторичной компоненты намагниченности сопоставимой с величиной первичной компоненты.

Модификации теста складки

Общие положения теста складки. С помощью теста складки производят оценку возраста намагниченности относительно времени складкообразования. Тест складки основан на следующих основных предположениях: первичное положение слоев известно и пласты вращались вокруг горизонтальных осей; анализируемая намагниченность образовалась в одном по направлению геомагнитном поле либо до, либо после складкообразования. Если эти предположения удовлетворяются, то формулируется некоторая зависящая от модификации теста складки гипотеза, которая проверяется статистическими методами. Например, если намагниченность доскладчатая, т.е. образовалась в древней системе координат, то:

- 1) средние направления намагниченности для крыльев складки в древней системе координат должны совпадать;
- 2) не должно быть корреляции между векторами намагниченности в древней системе координат и элементами залегания пластов;
- 3) в современной системе координат вид распределения векторов намагниченности должен определяться только распределением векторов в древней системе координат и элементами залегания пласта.

Аналогичные рассуждения применимы для случая послескладчатой намагниченности. Таким образом, после проведения проверки гипотезы в двух координатных системах возможна следующая интерпретация результатов тестирования.

1. Гипотеза удовлетворяется только в древней системе координат (намагниченность доскладчатая).

2. Гипотеза удовлетворяется только в современной системе координат (намагниченность послескладчатая).

3. Гипотеза отвергается в обеих координатных системах (намагниченность является суммой до- и послескладчатой компонент).

4. Гипотеза удовлетворяется в обеих системах координат (тест не дает определенного вывода: недостаточны вариации элементов залегания пластов и/или недостаточен объем коллекции).

Рассмотрим подробнее различные модификации теста складки.

Тест выравнивания (отношение кучностей) – McElhinny test. Эта модификация рассматривает кучности совокупности векторов намагниченности в древней и современной системах координат. Если кучность в древней системе координат значительно больше кучности в современной системе координат, то в исходной намагниченности *преобладает* доскладчатая компонента (рис. 3.3).

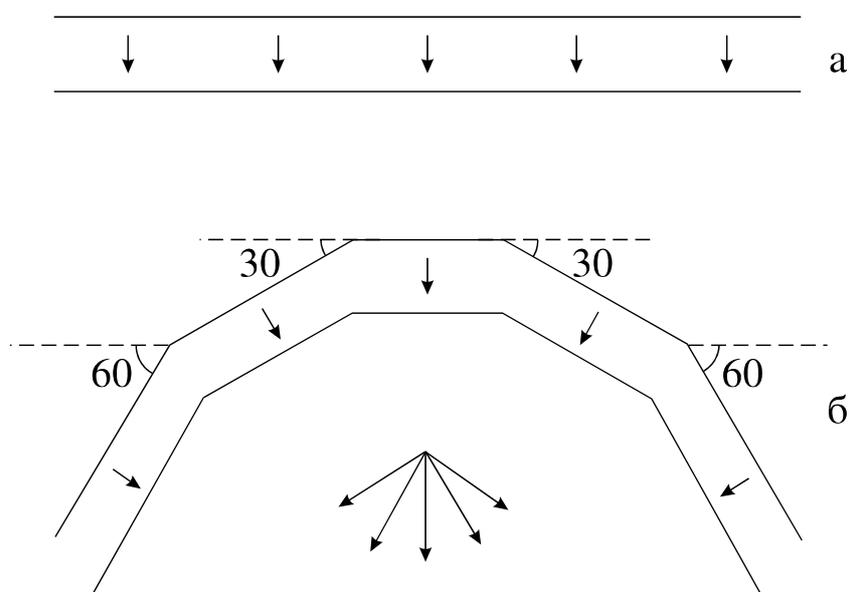


Рис. 3.3. Соотношение концентрации векторов доскладчатой намагниченности

Средние векторы доскладчатой намагниченности для пластов с различающимся залеганием совпадают только в древней системе координат (а, б – древняя и современная системы координат, соответственно).

И, наоборот, если кучность в современной системе координат значимо больше кучности в древней системе координат, то в исходной намагниченности *преобладает* послескладчатая компонента. Так как преобладание той или иной компоненты – единственный корректный вывод, который может быть сделан при использовании теста выравнивания, то он не может применяться для датирования намагниченности относительно времени складкообразования.

Сравнение средних направлений намагниченности для разрезов с различающимися элементами залегания пластов (McFadden & Jones test). Если анализируемая намагниченность доскладчатая, то при значительных вариациях в элементах залегания нескольких разрезов средние направления намагниченности будут *статистически совпадать* только в древней системе координат (см. рис. 3.3).

Напротив, если анализируемая намагниченность послескладчатая, то при значительных вариациях в элементах залегания нескольких разрезов средние направления намагниченности будут *различаться незначимо* только в современной системе координат. Если вариации элементов залегания пластов незначительны, то в обеих координатных системах различия в средних направления намагниченности незначимы.

Таблица 3.4. Интерпретация проверки значимости различий средних направлений

В древней системе координат направления:	В современной системе координат направления:	Вывод
совпадают	различаются	Намагниченность доскладчатая
различаются	совпадают	Намагниченность послескладчатая
различаются	различаются	Суперпозиция до- и послескладчатой компонент либо намагниченность синскладчатая
совпадают	совпадают	Неопределенный: недостаточные вариации в элементах залегания пластов и/или недостаточный объем коллекции

Эта модификация теста складки предполагает, что: 1) каждый из разрезов строго моноклинален; 2) распределение векторов намагниченности в обеих координатных системах соответствует распределению Фишера; 3) палеоветковые вариации геомагнитного поля достаточно хорошо осреднены (это требует отбора большого количества образцов из каждого крыла). Однако, так как эти предположения в общем случае могут не выполняться, то данная модификация теста складки приближенная.

Тестирование проводится в двух координатных системах (древней и современной). В табл. 3.4 дана возможная интерпретация результатов тестирования.

Корреляционная модификация теста складки. Если намагниченность доскладчатая, то распределение векторов намагниченности: 1) в древней системе координат не должно зависеть от распределения элементов залегания пластов; 2) в современной системе координат определяется формулами пересчета, в которые входят элементы залегания пластов.

Иными словами, если намагниченность доскладчатая, то корреляция между векторами намагниченности и элементами залегания пластов (нормальными к пластам) может наблюдаться только в современной системе координат. Напротив, если намагниченность послескладчатая, то корреляция между векторами намагниченности и нормальными к пластам может наблюдаться только в древней системе координат (рис. 3.4).

В корреляционной модификации теста складки предполагается, что распределение векторов намагниченности в обеих координатных системах соответствует распределению Фишера. Однако в последней версии этой модификации это ограничение отсутствует (см. лекцию 4).

Корреляционная модификация теста складки не требует отбора множества образцов из каждого крыла складки. Тестирование проводится также в двух координатных системах (древней и современной). В табл. 3.5 дана возможная интерпретация результатов

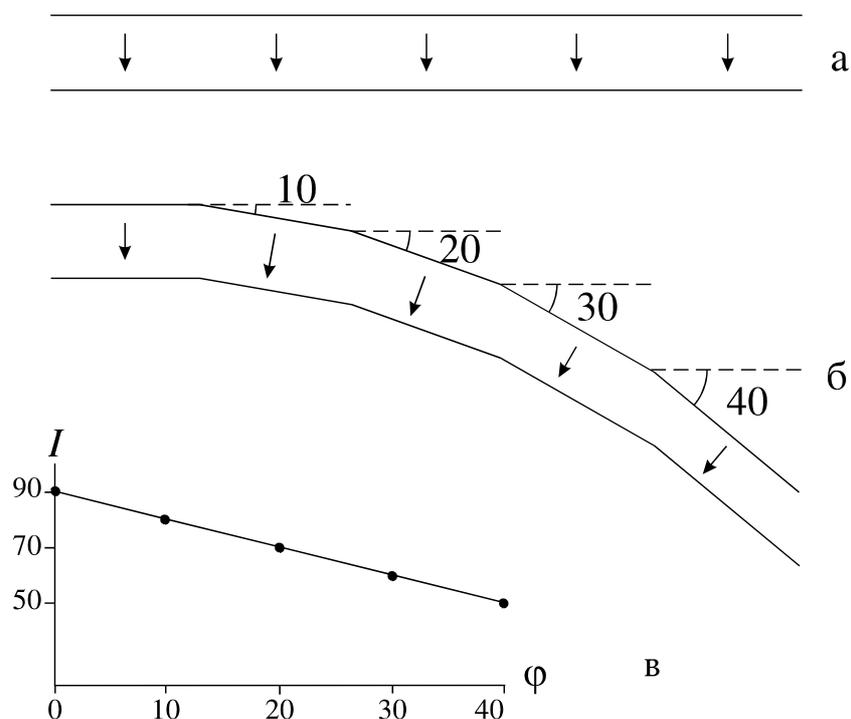


Рис. 3.4. Принцип работы корреляционной модификации теста складки (возникновение корреляции между векторами доскладчатой намагниченности в современной системе координат и элементами залегания пластов)
 а, б – древняя и современная системы координат, соответственно;
 в – зависимость наклона (I) в современной системе координат от угла падения пластов (φ)

Таблица 3.5. Интерпретация проверки значимости корреляции

В древней системе координат корреляция:	В современной системе координат корреляция:	Вывод
незначима	значима	Намагниченность доскладчатая
значима	незначима	Намагниченность послескладчатая
значима	значима	Суперпозиция до- и послескладчатой компонент либо намагниченность синскладчатая
незначима	незначима	Неопределенный: недостаточные вариации в элементах залегания пластов и/или недостаточный объем коллекции

Модификации теста складки в постановке проблемы оценки параметра (Watson & Enkin test, Tauxe & Watson test). Эти модификации теста складки рассматривают распределения векторов намагниченности в древней, современной системах координат, а также во всех возможных координатных системах, возникающих при *пропорциональном распрямлении складки*. Например, для трех палеомагнитных образцов, взятых из пластов с углами падения 10° , 30° и 60° , соответственно, 30%-ное пропорциональное распрямление крыльев складки даст направления намагниченности при повороте от современного залегания пластов на 3° , 9° и 18° , соответственно, к первоначальному их горизонтальному залеганию.

При выполнении этих модификаций теста складки используется численное моделирование фишеровских выборок векторов, или рандомизация исходных данных (подробнее о критерии перестановок см. лекцию 4).

Оцениваемым параметром является степень распрямления пластов (в %), характеризующая степень деформации пластов в момент образования анализируемой намагниченности. Если полученная степень распрямления равна 0 или 100%, то делается вывод о том, что намагниченность после- или доскладчатая, соответственно. При промежуточной степени деформации, намагниченность полагается синскладчатой.

Первая модификация предполагает фишеровское распределение векторов намагниченности (это ограничение можно обойти), во второй модификации это предположение уже отсутствует. Обе модификации предполагают пропорциональность процесса образования складки, что далеко не всегда верно. Поэтому в общем случае эти модификации корректны только в крайних точках (в древней и современной системах координат).

Анализируемые параметры этих модификаций: кучность векторов (для первой) и максимальное собственное значение матрицы рассеяния (для второй). Последняя статистика позволяет рассматривать биполярные распределения намагниченности без предварительного их обращения.

Модификации теста складки NFT основана на анализе распределений векторов намагниченности в двух координатных системах. В этой модификации анализу подвергается кучность распределения векторов; при ее выполнении используется численное моделирование, или рандомизация исходных данных.

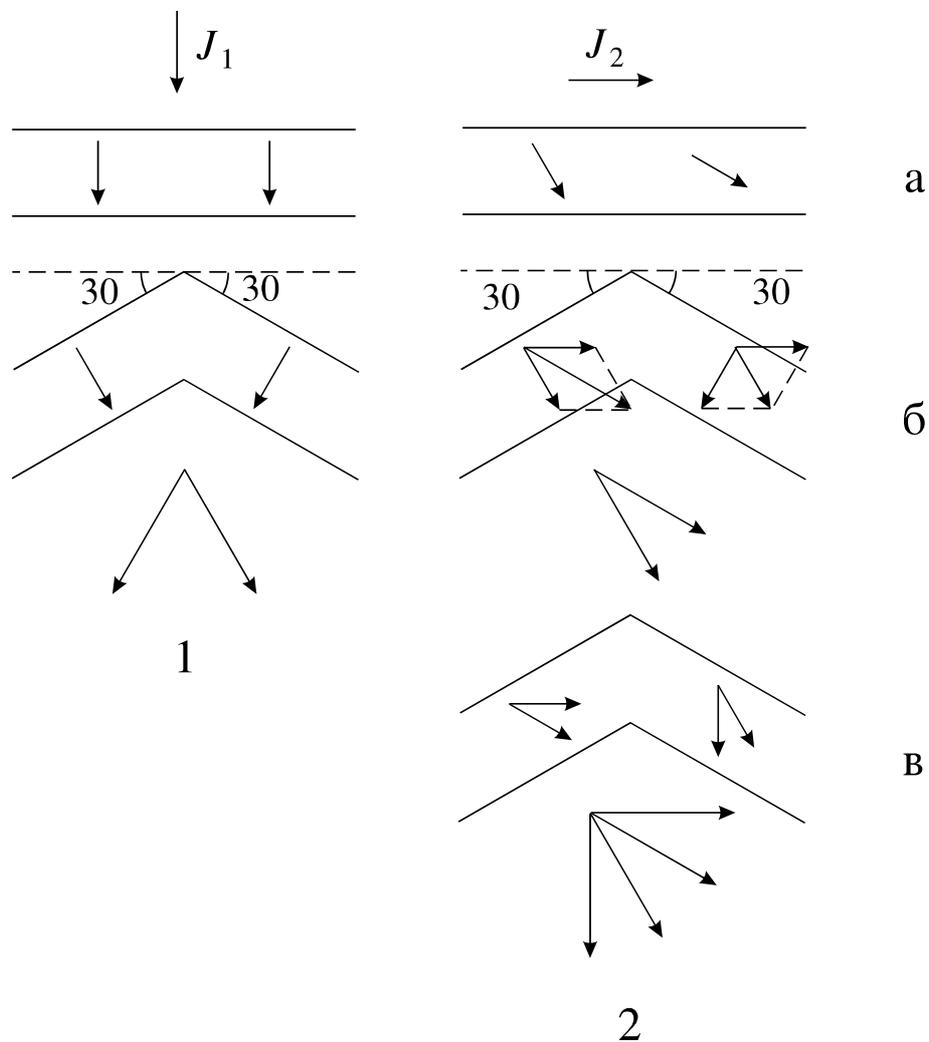


Рис. 3.5. Принцип работы модификации теста складки NFT

1 – исходная намагниченность доскладчатая: моделирование исходного распределения (1, а) и пересчет его в современную систему координат дает аналогичное исходному распределение векторов в современной системе координат (1, б).

2 – намагниченность является суперпозицией до- и послескладчатой компонент: моделирование исходного распределения (2, а) и пересчет его в современную систему координат (2, в) дает распределение, отличающееся по кучности от исходного распределения векторов в современной системе координат (2, б)

Если исходная намагниченность, например, доскладчатая, то распределение векторов в современной системе координат

определяется лишь распределением доскладчатой намагниченности в древней системе координат и элементами залегания пластов (рис. 3.5). Поэтому, моделируя много раз исходное распределение векторов намагниченности в древней системе координат и по имеющимся элементам залегания пластов пересчитывая их в современную координатную систему, можно получить достаточно правдоподобную оценку кучности распределения векторов в современной системе координат при условии выполнения предположения доскладчатости исходной намагниченности (рис. 3.5).

Если имеющееся распределение векторов в современной системе координат не удовлетворяет модельным распределениям, то предположение доскладчатости отвергается. Например, при наличии в анализируемой выборке до- и послескладчатой компонент намагниченности кучность исходного распределения векторов в современной системе координат будет отличаться от кучности модельных распределений, полученных в предположении доскладчатости намагниченности (рис. 3.5).

Аналогичные рассуждения используются при тестировании в современной системе координат (в предположении послескладчатости намагниченности).

Эта модификация теста складки не требует отбора множества образцов из каждой моноклинали и, в случае использования рандомизации, не выдвигается предположений о виде распределения. Тестирование проводится также в двух координатных системах (древней и современной).

Новые модификации теста галек

Выше в этой лекции было показано, что мощность *теста Рэлея* (чувствительность в обнаружении вторичной компоненты намагниченности в гальках) не оправдывает надежд палеомагнитологов, и вывод, который чаще всего делается при тестировании (распределение векторов неотлично от равномерного), не надежен. Существуют и другие стандартные

модификации теста равномерности векторов на сфере, но и их чувствительность не превосходит чувствительности теста Рэля.

Тест галек повышенной надежности. Этот тест использует перестановку местами нулевой и альтернативной гипотез. При тестировании коллекции галек используется следующая процедура. Пусть у нас имеется коллекция галек объемом 20 векторов.

1. Выбирается допустимая угловая ошибка в определении вектора намагниченности коренных пород и, следовательно, допустимое содержание вторичной намагниченности (величина $t^* = J_2/J_1$). Допустим, что для последующей тектонической интерпретации палеомагнитного результата, полученного для коренных пород, соответствующих по составу анализируемой коллекции галек, нас устраивает систематическая ошибка в определении направления древнего палеомагнитного поля 15° . Следовательно, нас, соответственно, не волнует относительное содержание вторичной намагниченности $t^* < 0.25$ (рис.3.6).

Если имеется приблизительная информация о направлениях первичного и перемагничивающего полей, то величина t^* может быть определена более точно.

2. Проверяемая нулевая гипотеза: относительное содержание вторичной намагниченности $t > t^* = 0.25$.

3. Статистикой критерия служит, как и в тесте Рэля, нормированная на объем выборки величина суммарного вектора. Критическое значение статистики на 20%-ом уровне значимости равно 0.17 (критическое значение теста Рэля для этого случая равно 0.36). Если статистика критерия меньше критического значения, то нулевая гипотеза отвергается, т.е. делается вывод о том, что $t < t^*$ и что возможные систематические угловые ошибки в определении вектора намагниченности коренных пород меньше допустимых. Вероятность ошибочности такого вывода равна используемому уровню значимости. Если статистика критерия больше критического значения, то нулевая гипотеза принимается и, следовательно, коллекция бракуется, так как возможно содержащаяся в анализируемой выборке векторов вторичная

компонента намагниченности приведет к систематическим ошибкам большим, чем нам хотелось бы.

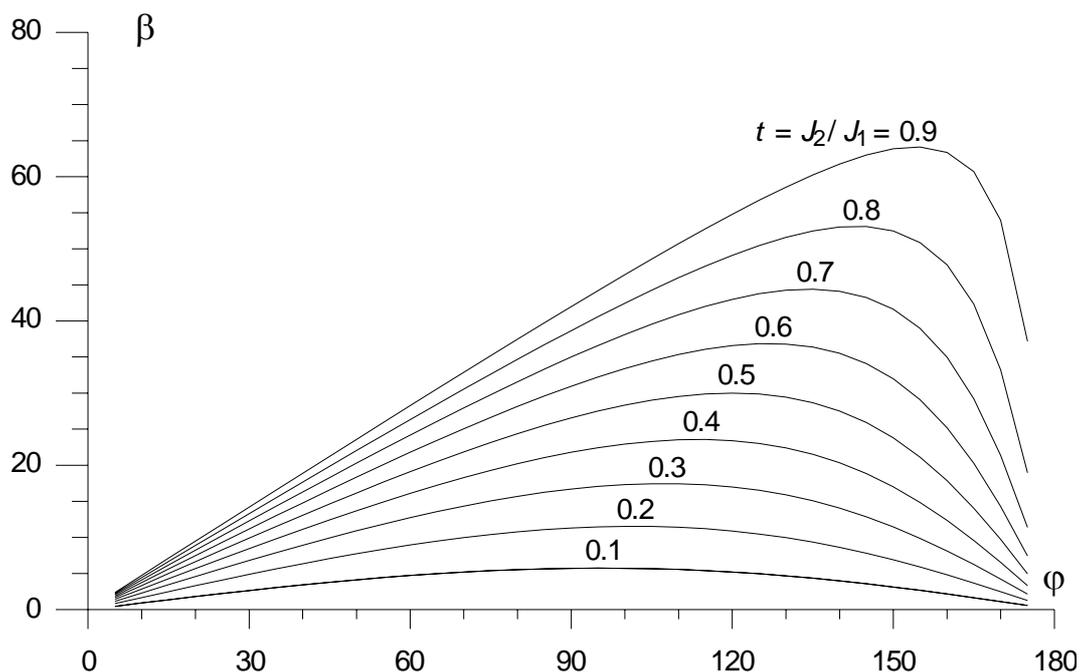


Рис. 3.6. Угловая ошибка β в определении направления вектора J_1 при различной степени перемагничивания $t = J_2/J_1$ в зависимости от угла ϕ между векторами J_1 и J_2

Таким образом, положительный для палеомагнитолога результат – высоко надежен. Однако при работе с этой модификацией теста галек часты случаи отрицательного результата (“хорошая” коллекция может быть забракована).

Новый тест галек (тест галек, использующий дополнительную информацию). Широко известная модификация теста галек (тест Рэлея), применяющаяся для выяснения вопроса о присутствии в исходной намагниченности вторичной (регулярной) компоненты, никак не использует доступную для палеомагнитолога информацию о направлении возможного перемагничивания. Такие данные могут быть получены, например, при палеомагнитном анализе коренных пород.

В качестве направления перемагничивающего поля могут быть использованы: а) среднее направление послескладчатой намагниченности в современной системе координат для коренных пород; б) среднее направление доскладчатой намагниченности в современной системе координат для коренных пород, более молодых, чем конгломераты; в) среднее

направление некоторой компоненты намагниченности галек, отклоненной тестом Рэля; г) направление современного геомагнитного поля (при отсутствии дополнительной информации).

Критерий Рэля тестирует нулевую гипотезу о том, что выборка векторов извлечена из равномерного распределения против альтернативной гипотезы: выборка соответствует распределению Фишера с неизвестным средним с ненулевой кучностью. Новый тест галек рассматривает ту же нулевую гипотезу против альтернативы – выборка извлечена из распределения Фишера с известным центром и ненулевой кучностью.

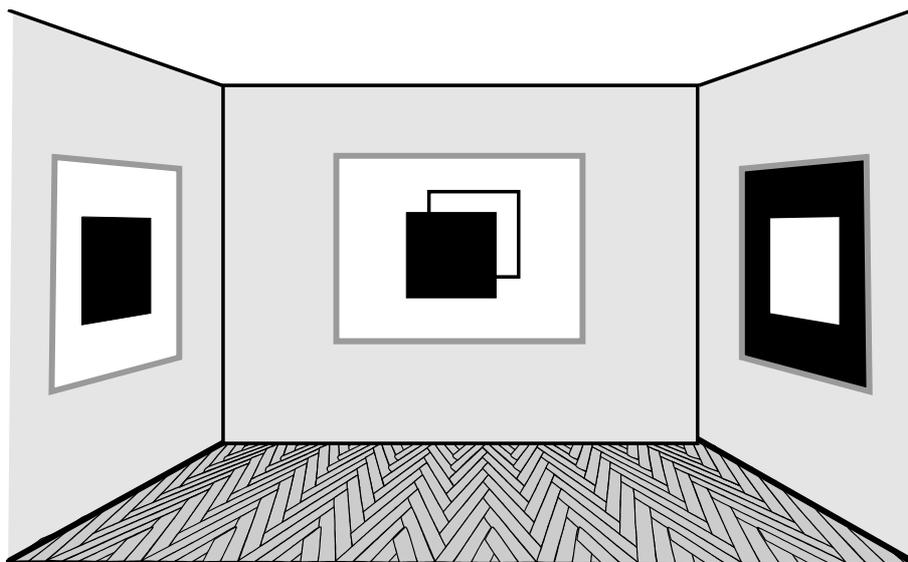
Статистикой критерия служит нормированная на объем выборки сумма проекций исходных векторов на заданное направление. Если статистика больше некоторого критического значения, то нулевая гипотеза о равномерности отклоняется и делается вывод о том, что заданное направление перемагничивания является предпочтительным для векторов коллекции. Для объема выборки не менее 12 векторов нулевое распределение статистики критерия имеет достаточно простую аппроксимацию нормальным распределением со средним 0 и дисперсией $1/(3N)$, что может быть использовано для определения критических значений с точностью до трех знаков после запятой.

Численное моделирование новой модификации теста галек показало значительно большую его мощность. Так, например, он в 2 – 3 раза чаще будет обнаруживать присутствующую в коллекции вторичную намагниченность или ее обнаружение возможно при меньшей степени перемагничивания. Отметим, наконец, что направление перемагничивания может быть задано не столь точно (ошибка до 30-40° не значительно сказывается на чувствительности новой модификации теста галек).

* * *

В этой лекции ничего не говорилось о других полевых тестах, например, таких, как тесты контакта и обращения. Оба они основаны на сравнении средних направлений для двух выборок

векторов. Подобная процедура была упомянута выше при рассмотрении одной из модификаций теста складки (*McFadden & Jones test*), исследующей значимость различия двух выборок векторов, извлеченных из распределения Фишера. В следующей лекции будет рассмотрен пример непараметрического решения этой задачи (т.е. без условий, налагаемых на вид распределения).



*Я давно говорю тебе, что я то же бы сделал,
но только не так*

Лекция 4. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Численное моделирование, или метод Монте-Карло, представляет собой способ решения разнообразных задач путем использования случайных величин. В палеомагнитологии метод Монте-Карло может применяться в трех областях: при анализе некоторой проблемы, при получении точечных и интервальных оценок и при проверке гипотез.

Достоинством метода Монте-Карло является простота вычислительных алгоритмов, моделирующих реальные процессы при решении различного рода задач.

В программном обеспечении большинства компьютеров имеются так называемые датчики случайных чисел – процедуры, которые вычисляют последовательность псевдослучайных чисел, равномерно распределенных на интервале $(0, 1)$. Способы образования случайных чисел с заданным законом распределения состоят в преобразовании равномерно распределенных чисел в необходимую последовательность.

Один из наиболее простых способов получения случайных чисел, функция распределения которых $F(x)$, заключается в следующем. Пусть γ – случайное число, равномерно распределенное на интервале $(0, 1)$. Тогда, пользуясь обратной функцией, вычисляют $\delta = F^{-1}(\gamma)$. Величина δ будет распределена в соответствии с требуемым законом.

Рассмотрим пример получения случайного вектора, распределенного равномерно в некотором круге сферы с центром (D_0, I_0) и радиусом φ_0 . Функции распределения вероятностей азимутального и радиального углов (см. задачу 1.1), имеют вид:

$$F(\psi) = \psi/2\pi; \quad F(\varphi) = (1 - \cos\varphi)/(1 - \cos\varphi_0).$$

Соответственно, обратные функции выражаются формулами:

$$\psi = 2\pi x; \quad \varphi = \arccos[1 - (1 - \cos\varphi_0)x].$$

Поэтому, если x и y – два случайных числа, равномерно распределенных на $(0, 1)$, то (ψ, φ) – вектор, равномерно

распределенный на сфере в круге радиусом φ_0 . Так как пределы изменения радиального угла – от 0 до π , то, чтобы получить искомое распределение, осталось преобразовать φ к виду, используемому при задании палеомагнитных координат векторов: $\varphi^* = \pi/2 - \varphi$, и затем произвести вращение (ψ, φ^*) к центру заданного распределения (D_0, I_0) .

Моделирование единичных векторов на сфере из равномерного и фишеровского распределений производят аналогичным образом, используя обратные функции к формулам (1.5 – 1.7).

Проверка гипотез методом Барнарда. Этот метод используется для тестирования гипотез, когда процентные точек распределений трудно или невозможно получить аналитически. Предположим, что необходимо проверить некоторую выборочную статистику z^* на значимость на α -ном уровне (пусть для определенности большие значения величины z ведут к отклонению нулевой гипотезы H_0), а таблица критических значений z не доступна. Проведя $M - 1$ (M достаточно большое число, например, 1000) испытание по методу Монте-Карло *при условии выполнения H_0* , получим значения статистики критерия

$$z_1, z_2, \dots, z_{M-1}.$$

Добавив к ним z^* и упорядочив все эти величины по возрастанию, имеем в результате

$$z_{(1)} < z_{(2)} < \dots < z_{(M)}.$$

Для определенности в случае равенства поставим z^* на первое место. Тогда, согласно H_0 , вероятность того, что z^* попадет в число t наибольших величин в отсортированной последовательности равна t/M . Вероятность ошибки 1-го рода для критерия, отклоняющего нулевую гипотезу H_0 , если z^* находится среди t наибольших величин, будет, таким образом, $\alpha = t/M$.

Аналогичная процедура может быть применена для вычисления критических значений. При этом проводим M испытаний по

методу Монте-Карло при условии выполнения гипотезы H_0 и получаем значения статистики критерия

$$z_1, z_2, \dots, z_M.$$

Упорядочив все эти величины по возрастанию, имеем в результате

$$z_{(1)} < z_{(2)} < \dots < z_{(M)}.$$

Тогда критическим значением статистики с уровнем значимости α является $(1 - \alpha)$ M -ая величина в отсортированном списке (здесь, как и выше, для определенности предполагается, что большие значения величины z ведут к отклонению нулевой гипотезы).

Пример 4.1. *Модификация теста складки NFT.* Допустим в результате палеомагнитного анализа мы получили распределение векторов в древней системе координат и хотим, выполнив тест складки, протестировать гипотезу (H_0) о том, что это распределение векторов доскладчатое.

Если нулевая гипотеза верна, то распределение соответствующих векторов в современной системе координат есть просто результат пересчета.

Иными словами, в случае истинности нулевой гипотезы распределение векторов в современной системе координат (среднее направление и кучность) зависят только от распределения доскладчатой намагниченности и элементов залегания пластов. Тогда в предположении справедливости H_0 можно выполнить следующую процедуру.

В древней системе координат смоделировать *много раз* выборку из фишеровского распределения с имеющимися параметрами, перевести ее, в соответствии с имеющимися элементами залегания пластов, в современную систему и вычислить кучность результирующей выборки.

Таким образом, мы получим распределение величины кучности в современной системе координат при условии истинности нулевой гипотезы.

Если H_0 верна, то величина кучности исходной выборки в современной системе координат должна соответствовать полученному нулевому распределению.

Таким же образом должна быть протестирована гипотеза о послескладчатом возрасте намагниченности. Интерпретация результата тестирования в двух системах координат аналогична интерпретации, например, модификации теста складки, сравнивающей средние направления намагниченности для разрезов с различающимися элементами залегания (см. лекцию 3).

Критерии рандомизации. Рандомизированные критерии – это непараметрические процедуры, основанные на истинных наблюдениях и их статистической природе. Они полезны для малых выборок, но могут стать очень громозкими при увеличении их объемов. Другими названиями подобного рода критериев являются “*permutation*” или “*bootstrap*”, использующееся в англоязычной статистической и палеомагнитной литературе.

Рассмотрим два примера применения критерия рандомизации.

Пример 4.2. Опишем кратко процедуру проверки гипотезы о том, что две имеющиеся выборки векторов взяты из одного распределения (не обязательно фишеровского). Исходными данными служат $D_{j1}, I_{j1}, n_1, D_{j2}, I_{j2}, n_2$, где D_j, I_j – склонения и наклонения векторов выборок, а n_1 и n_2 – их объемы.

Допустим, что вид и параметры распределения полностью известны. Тогда можно численно смоделировать две выборки объемами n_1 и n_2 из этого распределения. Каждый вектор, например, первой выборки с таким же успехом может оказаться в другой выборке. Иными словами, с равной вероятностью любой из единичных векторов может принадлежать как первой, так и второй выборке. Поэтому не будет ошибкой поменять местами любые пары векторов в выборках. При этом мы никак не учитываем вид и параметры распределения, а используем только тот факт, что каждая выборка (или каждый вектор в одной из двух выборок) взяты из одной генеральной совокупности.

Поэтому при истинности проверяемой нулевой гипотезы о том, что две имеющиеся выборки векторов взяты из одной генеральной совокупности, можно проделать те же операции по перестановке векторов. Тогда процедура тестирования выглядит следующим образом.

1. Вычисляется угловое расстояние между средними векторами выборок φ_0 , которое будет служить статистикой критерия.

2. Много раз (например, $m = 1000$) из объединенной выборки объема $N = n_1 + n_2$ случайным образом составляются две выборки объемами n_1 и n_2 и определяется угловое расстояние между ними $\varphi_j, j = 1, \dots, m$ (процедура, создающая две случайные выборки, должна удовлетворять требованию несмещенности, т.е. каждая полученная реализация должна встречаться в процессе тестирования только один раз).

3. Полученный массив углов φ_j сортируется в порядке возрастания.

4. Производится сравнение исходной величины угла φ_0 с нулевым распределением этого угла, т.е. возможными его значениями при условии выполнения нулевой гипотезы. Если величина φ_0 в некотором смысле соответствует нулевому распределению, то нулевая гипотеза принимается. В противном случае, например, при достаточно большом ее значении (большем некоторого критического), нулевая гипотеза должна быть отвергнута. Критическим значением на 5%-ном уровне значимости служит $0.95m$ -ое значение угла в отсортированном списке j .

Пример 4.3. Процедура проверки гипотезы о независимости (значимости коэффициента корреляции) двух связанных выборок векторов (например, в корреляционной модификации теста складки в качестве одной из них выступает совокупность векторов намагниченности, другая выборка – распределение нормалей к пластам).

Пусть имеются две выборки векторов $X, Y: (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)$. Основной довод за использование критерия рандомизации состоит в том, что при выполнении нулевой

гипотезы о независимости имеющихся выборок каждая пара векторов (x_i, y_i) является просто одной из многих равновероятных пар. Например, другая возможная выборка $(x_1, y_2), (x_2, y_3), \dots, (x_N, y_1)$ имеет такую же вероятность появления при условии выполнения нулевой гипотезы. Общее число таких возможных различных выборок соответствует числу различных перестановок последовательности Y при неизменной последовательности X и равно $N!$.

Для выполнения теста рандомизации необходимо вычислить некоторую статистику, определяющую корреляцию (коэффициент корреляции r). Сначала вычислим коэффициент корреляции r для имеющихся выборок; обозначим его r^* . Произведем перестановку в последовательности Y и вычислим выборочную корреляцию для такой новой выборки. Повторим последнюю операцию для всех возможных перестановок и получим $N!$ коэффициентов корреляции r_1, r_2, \dots, r_M ($M = N!$).

Следующий шаг состоит в определении: соответствует ли выборочное значение r^* другим M значениям коэффициента корреляции. Для этого отсортируем последовательность r_i в возрастающем порядке и получим

$$r_{(1)} < r_{(2)} < \dots < r_{(M)} .$$

Предположим для определенности, что нас интересует альтернативная гипотеза о наличии как положительной, так и отрицательной корреляции, т.е. двухсторонний тест. В этом случае нам следует отклонить гипотезу о независимости исходных выборок, если величина r^* либо значимо больше, либо значимо меньше других сравниваемых значений r ; например, при тестировании на α уровне значимости нулевая гипотеза будет отклонена, если r^* либо меньше $(\alpha/2)M$ -го значения в отсортированном списке, либо больше $(1 - \alpha/2)M$ -го значения. Такой результат можно проинтерпретировать как невыполнение основного предположения о том, что все $N!$ возможные выборки равновероятны.

Вычислительные аспекты критериев рандомизации. Для выборок большого объема утомительно вычислять все $N!$

возможные перестановки исходных данных. Эту проблему можно удовлетворительным образом обойти, генерируя достаточно большое число M (скажем, 1000) случайных перестановок и вычисляя затем коэффициенты корреляции для соответствующих M выборок.

Bootstrap процедуры. Бутстреп-процедуры отличаются от традиционных методов статистического анализа данных тем, что они предполагают многократную обработку различных частей одной и той же имеющейся выборки и сопоставление полученных таким образом результатов. Достоинством подобных процедур является простота реализации и легкость переносимости для решения задач анализа многомерных данных.

Следует отметить, что к настоящему времени корректность бутстреп-метода, которая проверяется путем сравнения получаемых результатов различными, в том числе традиционными, методами, до конца не доказана. Поэтому, вероятно, при практическом его использовании требуются, кроме большого объема вычислений, дополнительные усилия для обоснования результата с помощью анализа сходных задач, решения для которых известны.

Пример 4.4. Используем бутстреп для определения доверительного интервала для среднего наклона выборки векторов. Пусть имеется выборка $D_i, I_i, i = 1, \dots, N$. Каждому исходному вектору приписывается вес, равный $1/N$, который используется при многократном создании бутстреп-выборок из исходной совокупности.

1. Выбирается случайным образом номер от 1 до N , например m_1 , и в бутстреп-выборку заносится m_1 -й вектор из исходной совокупности. Снова случайным образом выбирается номер от 1 до N , например m_2 , и в бутстреп-выборку заносится m_2 -й вектор из исходной совокупности. Заметим, что с вероятностью $1/N$ этим вектором может оказаться тот же самый вектор.

Эта процедура продолжается до тех пор пока в бутстреп-выборке не окажется N векторов (при этом некоторые векторы исходной выборки могут присутствовать в ней несколько раз, а другие совсем отсутствовать).

2. Вычисляется среднее направление бутстреп-выборки (D_{Bj}, I_{Bj}).

3. Пункты 1 и 2 повторяются много раз (например, $M = 1000$).

4. Таким образом, мы будем иметь массив наклонов I_{Bj} объемом M . Отсортировав его, как обычно, по возрастанию, можно определить границы доверительного интервала для среднего наклона. Например, для 95%-ного доверительного интервала нижней и верхней границами являются 0.025 M -й и 0.975 M -й элементы отсортированного списка, соответственно.

Бутстреп-процедуры, аналогичные рассмотренной в примере, не используют априорных и других знаний о виде распределения и могут использоваться для точечного и интервального оценивания любых параметров исходных совокупностей и проверки различных гипотез.

Рассмотрим пример применения численного моделирования методом Монте-Карло для анализа чувствительности применяемых в палеомагнитологии полевых тестов.

Пример 4.5. *Оценка мощности теста Рэлея (теста галек).* Мощность теста была определена в лекции 3 как вероятность отклонить нулевую гипотезу, когда она ложна, и для теста галек является, по существу, чувствительностью к обнаружению вторичной компоненты намагниченности. Применительно к тесту галек в качестве нулевой гипотезы служит высказывание: выборка векторов извлечена из равномерного распределения. Интуитивно подразумеваемая альтернативная гипотеза – в анализируемой совокупности векторов присутствует также регулярная компонента намагниченности, ассоциируемая с вторичной компонентой. Целью рассматриваемого моделирования является определение: насколько часто тест галек способен обнаружить вторичную компоненту, если она присутствует.

1. Задается объем выборки N и относительное содержание вторичной компоненты намагниченности $t = J_2/J_1$.

2. Моделируется выборка из равномерного распределения.

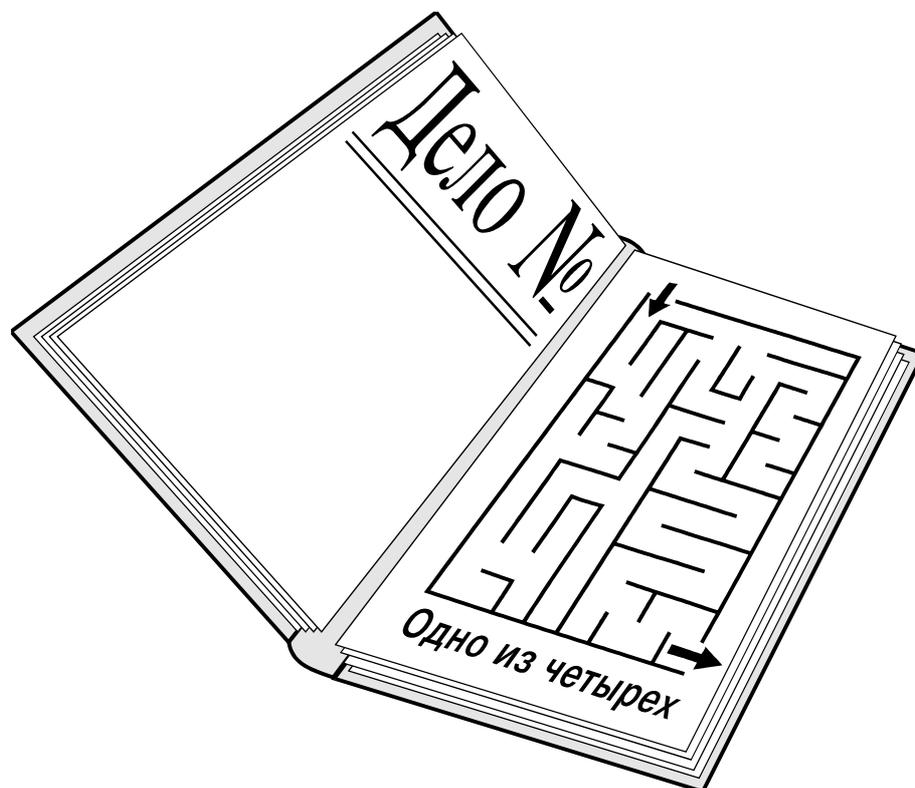
3. Моделируется выборка из распределения Фишера с кучностью k . Опыт подобного анализа показывает, что вариации величины кучности в пределах 30 – 100 не сказываются заметно на результирующем выводе. Выберем, например, величину кучности 50.

4. Из двух предыдущих выборок (пункты 2 и 3) составляется суммарная в пропорции, соответствующей относительному содержанию вторичной компоненты.

5. Проводится тестирование с помощью критерия Рэля.

6. Повторяя пункты 2 – 5 достаточно много раз (например, 1000), определяем, как часто в процентном отношении тест может обнаружить вторичную компоненту намагниченности. В табл. 3.3, полученной таким образом, приведены некоторые оценки мощности теста Рэля. Например, используя эту модификацию теста галек для выборки объемом 20 векторов, возможно идентифицировать вторичную компоненту намагниченности, величина которой в два раза меньше величины первичной намагниченности, только в 50 % случаев.

Подобные рассмотренной процедуры могут быть использованы для анализа мощности (чувствительности к обнаружению второй компоненты намагниченности) различных модификаций теста складки, оценки величины систематических ошибок в методе пересечения кругов перемагничивания и в других случаях.



Дело, однако, запутано, и надобно умеючи разбирать его

Лекция 5. ЕЩЕ НЕСКОЛЬКО ПРИМЕРОВ

В этой лекции будут затронуты некоторые вопросы, связанные с анализом палеомагнитных данных, ответ на которые предоставляется дать читателям.

Новая модификация теста галек. В лекции 3 была описана новая модификация теста галек, использующая дополнительные знания о направлении возможного перемагничивания. К формулировке этой модификации можно подойти несколько другим путем. Известно, что среднее направление выборки векторов, извлеченной из равномерного распределения на сфере, также распределено равномерно. Это вытекает из отсутствия какого-либо предпочтительного направления. Поэтому среднее направление такой выборки может быть каким угодно.

В случае присутствия также и вторичной намагниченности, среднее направление такой выборки векторов будет смещено к направлению перемагничивания и, если бы мы располагали множеством таких выборок, в среднем отражало бы направление перемагничивающего поля.

Поэтому можно выделить круговую область на сфере вокруг заданного направления перемагничивания, вероятность попадания в которую равномерно распределенного вектора равнялась бы 5%, и считать ее критической областью. Радиус такой области, определяемый по формуле для функции равномерного распределения на сфере (1.7), равен 25.8° (см. соответствующий раздел программы `Paleo_Statistics` в Содержании). Таким образом, процедура тестирования равномерности распределения исходной выборки векторов при заданном направлении возможного перемагничивания сводится к вычислению направления среднего вектора по коллекции и определению угла между ним и заданным направлением перемагничивающего поля. Если средний вектор попадет в критическую область, т.е. угол $\varphi < 25.8^\circ$, то гипотеза о равномерности должна быть отвергнута.

Следует отметить, что этот подход мной не проверялся. Проведение такой проверки, например, с помощью процедуры оценки мощности теста галек (см. пример 4.5), предоставляется читателям. Сформулирую лишь некоторые вопросы. Пусть r и ρ – статистики критерия Рэлей и новой модификации теста галек (см. лекцию 3), соответственно, а φ – угол между средним вектором и заданным направлением перемагничивания. Между этими величинами имеется соотношение: $\rho = r \cos \varphi$, при этом $\rho \leq r$. Что может означать получение таких их значений: $\rho < 0$; ρ незначимо (меньше критического), а r значимо (больше критического); φ – значимо (меньше 25.8°), а r и/или ρ незначимо?

Правомерность использования выборочных параметров для моделирования. В предыдущей лекции мы использовали численное моделирование фишеровских выборок по имеющимся параметрам. Однако выборочные параметры, оцененные по случайным выборкам, также случайны. Приведем процедуру, которая (или подобная которой), возможно, позволит разобраться в этом вопросе. Рассмотрим пример определения доверительного интервала для углового расстояния между двумя средними векторами.

1. Выберем истинные средние направления и кучности ($D_{0i}, I_{0i}, \kappa_{0i}$) двух выборок ($i = 1, 2$), играющие роль генеральной совокупности (в действительности о ней никогда не известно).

2. Извлечем из генеральной совокупности по одной выборке векторов объемами N_1 и N_2 , соответственно (это то, чем обычно располагает палеомагнитолог). Определим для них выборочные характеристики среднего и кучности ($D_{mi}, I_{mi}, \kappa_{mi}$).

3а. Смоделируем много раз выборки из распределения Фишера с параметрами, равными выборочным средним и кучности (пункт 2), каждый раз определяя угол между средними направлениями двух выборок.

3б. Извлечем из генеральной совокупности (параметры указаны в пункте 1) много раз по две выборки, определяя угол между средними направлениями двух выборок.

4. В результате выполнения пунктов 3а и 3б мы будем иметь два массива углов между средними направлениями двух выборок. Один из них (пункт 3б) получен из генеральной совокупности; параметры этого распределения характеризуют доверительный интервал для угла, который нам хотелось бы оценить. На основании другого массива (пункт 3а) можно получить распределение угла, построенного по имеющимся обычно выборкам. Сравнение этих двух наборов данных может позволить сделать вывод о том, насколько хорошо реальная оценка доверительного интервала отражает истинную.

Подобная процедура возможна при проверке корректности бутстреп-метода; при этом в пункте 3а следует создавать бутстреп-выборки из имеющихся в наличии данных (см. пример 4.4).

Сравнение чувствительности (мощности) различных модификаций теста складки. При работе с различными модификациями теста складки нередко возникают случаи, когда одни из них принимают, а другие отвергают анализируемую коллекцию. Это возможно, если одна модификация теста более чувствительна к обнаружению второй компоненты намагниченности, чем другая. Конечно же, возникает вопрос, каким модификациям теста верить, и желание использовать только те из них, которые дают устраивающие палеомагнитолога выводы. В связи с этим обстоятельством необходимо сравнение их чувствительности. Такое сравнение может быть выполнено (оно подобно рассмотренному в примере 4.5 анализу мощности теста галек) как для модельных выборок (варьируя значения многих входных параметров), так и для реальных данных, используя при моделировании фишеровских выборок имеющиеся параметры распределений векторов и реальные элементы залегания пластов.

Такой анализ должен включать оценку величин возможных угловых ошибок при принятии вывода некоторой модификации теста. Например, если корреляционная модификация теста пропускает коллекцию, делая вывод о доскладчатости исходной намагниченности, а модификация NFT отвергает ее

(свидетельствуя о суперпозиции до- и послескладчатых компонент в исходной выборке), то желание рассматривать только вывод первой из них должно быть подкреплено ответом на вопрос: какие возможны при этом угловые ошибки? Вероятно, в будущем, при отработанной методике такого анализа, ответ на этот вопрос должен быть включен в выводы любой палеомагнитной статьи, содержащей новое палеомагнитное определение. Подобный анализ может быть в принципе проделан на основе результата любого палеомагнитного теста (теста складки, теста галек, теста обращения).

;0) :~(

*Доволен ли сам объяснением моим читатель или нет,
не знаю. По крайней мере я имел искреннее желание
удовлетворить его хотя покуда*

ПОСЛЕСЛОВИЕ

Было бы непростительно, если бы все закончилось только текстом этой лекции. И поэтому, чтобы продолжить начатое, еще несколько простых формул (в необычной для палеомагнетизма системе координат):

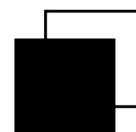
(095) 128-69-87

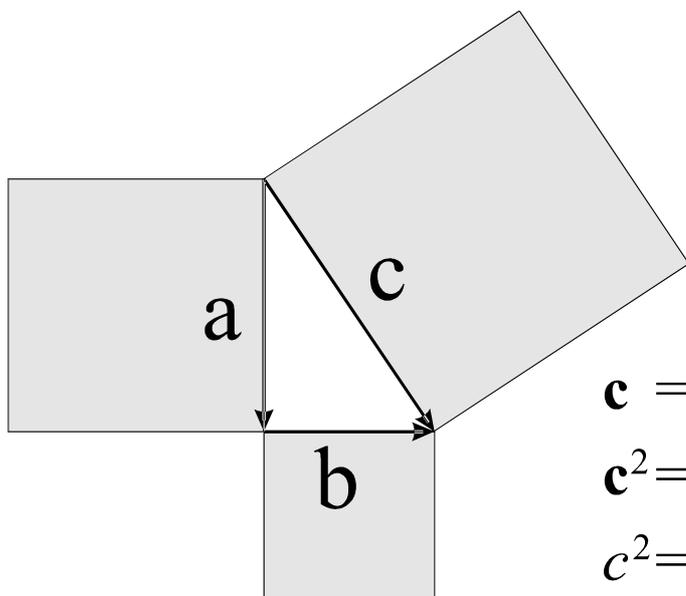
palmag@online.ru

svs1207@mail.ru

Это мои собственные координаты (номер служебного московского телефона и адреса электронной почты). Теперь, когда вы уже познакомились с лекциями, интерпретация этих формул не должна вызвать затруднений.

Скорей всего – это приглашение к сотрудничеству.





$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

$$c^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \frac{\pi}{2}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Несколько раз в первой части сего сочинения обещаю я читателям пояснить некоторые места, а другие, и без моего обещания, того требуют

Решения задач

1.1. Плотность равномерного распределения на сфере выражается формулой $f(\varphi, \psi) = 1/S$, где $S = 4\pi$ – площадь сферы единичного радиуса. Площадь сферического сегмента радиусом φ_0 равна $S = 2\pi(1 - \cos \varphi_0)$, следовательно, для плотности искомого распределения имеем $f(\varphi, \psi) = 1/[2\pi(1 - \cos \varphi_0)]$.

Возьмем интеграл по области определения

$$\int_0^{\varphi_0} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi \, d\varphi \, d\psi}{2\pi(1 - \cos \varphi_0)} = \int_0^{\varphi_0} \frac{\sin \varphi \, d\varphi}{(1 - \cos \varphi_0)} = \frac{(1 - \cos \varphi)}{(1 - \cos \varphi_0)} \Big|_0^{\varphi_0} = 1.$$

Интегрируя, получили маргинальную плотность для

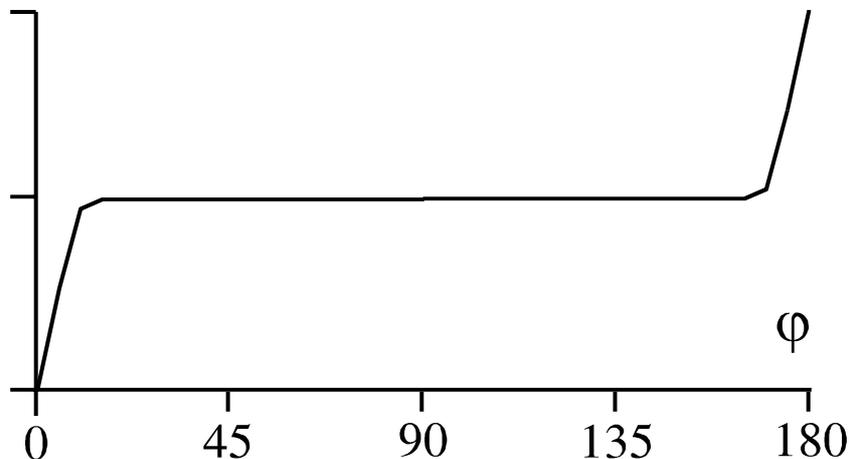
$$f(\varphi) = \sin \varphi / (1 - \cos \varphi_0)$$

и функцию распределения

$$F(\varphi) = (1 - \cos \varphi) / (1 - \cos \varphi_0).$$

Подставив, например, в последнее выражение $\varphi_0 = \pi$, получим формулу для равномерного распределения по всей сфере.

1.2. На рисунке представлена функция бимодального распределения Фишера при кучности 50 (сравните с функцией распределения Фишера на рис. 2.1).



Плато в средней части графика отражает равную вероятность для прямой и обратной полярностей намагниченности.

Плотность распределения, выражающаяся следующей формулой, можно найти по аналогии с обычным распределением Фишера (см. формулы 1.1, 1.4 и 1.5б)

$$f(\varphi, \psi) = C(\kappa) [\exp(\kappa \cos \varphi) - \exp(-\kappa \cos \varphi)] .$$

2.1. Максимизируемая функция $R = \Sigma (xx_0 + yy_0 + zz_0)$. Выражение в скобках определяет косинус угла между двумя *единичными* векторами. Он может принимать как положительные, так и отрицательные значения. По этой причине, а также потому, что бесконечно удаленная от начала координат точка может привести к бесконечному значению величины R , мы будем решать задачу методом неизвестных множителей Лагранжа, т.е. искать максимум выражения

$$R = \Sigma (xx_0 + yy_0 + zz_0) - \lambda (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 1) .$$

После взятия частных производных по неизвестным параметрам, получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \partial S / \partial x_0 &= \Sigma x_i - 2\lambda x_0 = 0 \\ \partial S / \partial y_0 &= \Sigma y_i - 2\lambda y_0 = 0 \\ \partial S / \partial z_0 &= \Sigma z_i - 2\lambda z_0 = 0 \\ \partial S / \partial \lambda &= (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 1) = 0 , \end{aligned}$$

имеем $x_0 = \Sigma x_i / (2\lambda)$, $y_0 = \Sigma y_i / (2\lambda)$, $z_0 = \Sigma z_i / (2\lambda)$. После подстановки условия нахождения решения на поверхности единичной сферы ($\lambda = 2R$), окончательно получаем: $x_0 = \Sigma x_i / R$, $y_0 = \Sigma y_i / R$, $z_0 = \Sigma z_i / R$.

Сопоставляя полученное решение с решениями примеров 3.2 и 3.3, можно обратить внимание, что рассмотрение трех различных задач:

$$\begin{aligned} S &= \Sigma r_E^2 &&= \Sigma [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2] \rightarrow \min , \\ S &= \Sigma \cos^2 \varphi &&= \Sigma (xx_0 + yy_0 + zz_0)^2 \rightarrow \max , \\ S &= \Sigma \cos \varphi &&= \Sigma (xx_0 + yy_0 + zz_0) \rightarrow \max , \end{aligned}$$

приводит к одному (или почти одному) решению. Это вызвано наличием следующих связей между суммируемыми выражениями

$$\begin{aligned}r_E^2 &= 4 \sin^2(\varphi/2) , \\ \cos^2 \varphi &= 1 - \sin \varphi , \\ \cos \varphi &= 1 - 2 \sin^2(\varphi/2).\end{aligned}$$

Литература

Книги по математике и статистике

- Афифи А., Эйзен С.* Статистический анализ: Подход с использованием ЭВМ. М.: Мир, 1982. 488 с.
- Браунли К.А.* Статистическая теория и методология в науке и технике. М.: Наука, 1977. 408 с.
- Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980. 520 с.
- Гудман С., Хидетниemi С.* Введение в разработку и анализ алгоритмов. М.: Мир, 1981. 368 с.
- Ильин В.А., Поздняк Э.Г.* Основы математического анализа. М.: Наука, 1971. Ч. 1. 600 с.
- Поллард Дж.* Справочник по вычислительным методам статистики. М.: Финансы и статистика, 1982. 346 с.

Статистика векторов

- Девис Дж.* Статистический анализ данных в геологии. М.: Недра, 1990. Кн. 1: 320 с.; Кн. 2: 428 с.
- Мардиа К.* Статистический анализ угловых наблюдений. М.: Наука, 1978. 240 с.
- Чини Р.Ф.* Статистические методы в геологии. М.: Мир, 1986. 192 с.
- Шипунов С.В.* Основы палеомагнитного анализа: Теория и практика. М.: Наука, 1993. 159 с. (Труды ГИН РАН; Вып. 487).
- Шипунов С.В., Алексютин М.В., Левашова Н.М.* Вопросы палеомагнитного анализа. М.: ГИН РАН, 1996. 62 с. (Труды ГИН РАН; Вып. 504).
- Fisher R.A.* Dispersion on a sphere // Proc. R. Soc. 1953. Vol. A217. P. 295–305.
- Fisher N.I., Lewis T., Embleton B.J.J.* Statistical analysis of spherical data. Cambridge: Univ. Press, 1987. 330 p.

Mardia K.V. Statistics of directional data. L.: Acad. Press, 1972. 357 p.

Watson G.S. Statistics on spheres. N.Y.: John Wiley, 1983. 238 p.

Общие палеомагнитные работы

Бурлацкая С.П. Археомagnetизм: Изучение древнего геомагнитного поля. М.: ИФЗ АН СССР, 1987. 248 с.

Петрова Г.Н. Лабораторные методы при палеомагнитных исследованиях // Геомагнитные исследования. 1977. Т. 19. С. 40–49.

Печерский Д.М. Петромагнетизм и палеомагнетизм. М.: Наука, 1985. 128 с.

Печерский Д.М., Диденко А.Н. Палеоазиатский океан. М.: ОИФЗ, 1995. 298 с.

Храмов А.Н. Палеомагнитная корреляция осадочных толщ. Л.: ВНИГРИ, 1958. 219 с. (Труды ВНИГРИ; Вып. 116).

Храмов А.Н., Гончаров Г.И., Комиссарова Р.А., Писаревский С.А., Погарская И.А., Ржевский Ю.С., Родионов В.П., Слауцитайс И.П. Палеомагнитология. Л.: Недра, 1982. 312 с.

Шипунов С.В. Элементы палеомагнитологии. М.: ГИН РАН, 1994. 64 с.

Яновский Б.М. Земной магнетизм. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. 592 с.

McElhinny M.W. Palaeomagnetism and plate tectonics. Cambridge: Univ. Press, 1973. 358 p.

Van der Voo R. Palaeomagnetism of the Atlantic, Tethys and Iapetus oceans. Cambridge: Univ. Press, 1993. 412 p.

Оценки направлений

Алексютин М.В. Метод пересечения прямых размагничивания в палеомагнетизме // Физика Земли. 1996. № 8. С. 42–51.

- Баженов М.Л., Шипунов С.В.* Метод пересечения дуг большого круга: Анализ и приложения в палеомагнетизме и тектонике плит // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1990. № 1. С. 96–103.
- Шипунов С.В.* Выделение компонент многокомпонентной естественной остаточной намагниченности при палеомагнитных исследованиях // Палеомагнетизм и аккреционная тектоника / Под ред. А.Н. Храмова. Л.: ВНИГРИ, 1988. С. 173–185.
- Шипунов С.В.* Синскладчатая намагниченность: Оценка направления и геологическое приложение // Физика Земли. 1995. № 11. С. 40–47.
- Шипунов С.В.* Критерии значимости в палеомагнетизме // Физика Земли. 1999. № 6. С. 89–92.
- Шипунов С.В., Бретштейн Ю.С.* Проблемы компонентного анализа в палеомагнетизме // Физика Земли. 1999. № 3. С. 52–61.
- Bailey R.C., Halls H.C.* Estimate of confidence in paleomagnetic directions derived from mixed remagnetization circle and direct observational data // J. Geophys. Res. 1984. Vol. 54. P. 174–182.
- Halls H.C.* A least-squares method to find a remanence direction from converging remagnetization circles // Geophys. J.R. Astr. Soc. 1976. Vol. 45. P. 297–304.
- Halls H.C.* The use of converging remagnetization circles in paleomagnetism // Phys. Earth Planet. Inter. 1978. Vol. 16. P. 1–11.
- Halls H.C.* Separation of multicomponent NRM: Combined use of difference and resultant magnetization vectors // Earth Planet. Sci. Lett. 1979. Vol. 43. P. 303–308.
- Hoffman K.A., Day R.* Separation of multicomponent NRM: A general method // Earth Planet. Sci. Lett. 1978. Vol. 40. P. 433–438.
- Kent J.T., Briden J.C., Mardia K.V.* Linear and planar structure in ordered multivariate data as applied to progressive demagnetization of palaeomagnetic remanence // Geophys. J.R. Astr. Soc. 1983. Vol. 75. P. 593–621.

- Kirschvink J.L.* The least-squares line and plane and analysis of palaeomagnetic data // *Geophys. J.R. Astr. Soc.* 1980. Vol. 62. P. 699–718.
- McFadden P.L.* Determination of the angle in Fisher distribution which will be exceeded with a given probability // *Geophys. J.R. Astr. Soc.* 1980. Vol. 60. P. 391–396.
- McFadden P.L.* The best estimate of Fisher's precision parameter // *Geophys. J.R. Astr. Soc.* 1980. Vol. 60. P. 397–407.
- McFadden P.L., McElhinny M.W.* The combined analysis of remagnetization circles and direct observations in palaeomagnetism // *Earth Planet. Sci. Lett.* 1988. Vol. 87. P. 161–172.
- McFadden P.L., Schmidt P.W.* The accumulation of palaeomagnetic results from multicomponent analysis // *Geophys. J.R. Astr. Soc.* 1986. Vol. 86. P. 965–979.
- Schmidt P.W.* Linearity spectrum of multi-component magnetizations and its application to some igneous rocks from south-eastern Australia // *Geophys. J.R. Astr. Soc.* 1982. Vol. 70. P. 647–666.
- Schmidt P.W.* Bias in converging great circle methods // *Earth Planet. Sci. Lett.* 1985. Vol. 72. P. 427–432.
- Schmidt P.W.* Palaeomagnetic cleaning strategies // *Phys. Earth Planet. Inter.* 1993. Vol. 76. P. 169–178.
- Schmidt P.W., Clark D.A.* Step-wise and continuous thermal magnetization theories of thermoremanence // *Geophys. J.R. Astr. Soc.* 1985. Vol. 83. P. 731–751.
- Shipunov S.V.* Synfolding magnetization: Detection, testing and geological applications // *Geophys. J. Int.* 1997. Vol. 130. P. 405–410.
- Torsvik T.V.* Interactive analysis of palaeomagnetic data: User guide. Bergen: 1987. 74 p.
- Zijderveld J.D.A.* A.c. demagnetization of rocks: Analysis of results // *Methods in palaeomagnetism* / Ed. D.W. Collinson, K.M. Creer, S.K. Runcorn. Amsterdam: Elsevier Publ. Co, 1967. P. 254–286.

Проверка гипотез

- Баженов М.Л., Рябушкин П.К.* Применение статистических критериев согласия в палеомагнитных исследованиях // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1978. № 7. С. 100–104.
- Баженов М.Л., Шипунов С.В.* Метод складки в палеомагнетизме // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1988. № 7. С. 89–101.
- Печерский Д.М.* Основные идеи и экспериментальная проверка метода длинных частиц // Изв. АН СССР. Сер. геол. 1970. № 3. С. 103–111.
- Шипунов С.В.* Тест галек в палеомагнетизме // Физика Земли. 1994. № 2. С. 25–32.
- Шипунов С.В.* Новый тест складки в палеомагнетизме (реабилитация теста выравнивания) // Физика Земли. 1995. № 4. С. 67–74.
- Шипунов С.В., Муравьев А.А.* Критерии равномерности для сферических данных в палеомагнетизме // Физика Земли. 1997. № 12. С. 71–82.
- Шипунов С.В., Муравьев А.А.* Чувствительность и надежность теста складки в палеомагнетизме // Физика Земли (в печати)
- Vazhenov M.L., Shipunov S.V.* Fold test in paleomagnetism: New approaches and reappraisal of data // Earth Planet. Sci. Lett. 1991. Vol. 104. P. 16–24.
- Fisher N.I., Lewis T., Willcox M.E.* Tests of discordancy for samples from Fisher's distribution on the sphere // Appl. Stat. 1981. Vol. 30. P. 230–237.
- Graham J.W.* The stability and significance of magnetism in sedimentary rocks // J. Geophys. Res. 1949. Vol. 54. P. 131–167.
- Kono M.* Statistics of paleomagnetic inclination data // J. Geophys. Res. 1980. Vol. 85. P. 3878–3878.
- McElhinny M.W.* Statistical significance of the fold test in palaeomagnetism // Geophys. J.R. Astr. Soc. 1964. Vol. 8. P. 338–340.
- McFadden P.L.* Rejection of palaeomagnetic observations // Earth Planet. Sci. Lett. 1982. Vol. 61. P. 392–395.

- McFadden P.L.* A new fold test for palaeomagnetic studies // Geophys. J. Int. 1990. Vol. 103. P. 163–169.
- McFadden P.L., Jones D.L.* The fold test in palaeomagnetism // Geophys. J.R. Astr. Soc. 1981. Vol. 67. P. 53–58.
- McFadden P.L., Lowes F.J.* The discrimination of mean directions drawn from Fisher distributions // Geophys. J.R. Astr. Soc. 1981. Vol. 67. P. 19–33.
- McFadden P.L., McElhinny M.W.* Classification of the reversal test in palaeomagnetism // Geophys. J. Int. 1990. Vol. 103. P. 725–729.
- McFadden P.L., Reid A.B.* Analysis of palaeomagnetic inclination data // Geophys. J.R. Astr. Soc. 1982. Vol. 69. P. 307–319.
- Shipunov S.V., Muraviev A.A., Bazhenov M.L.* A new conglomerate test in palaeomagnetism // Geophys. J. Int. 1998. Vol. 133. P. 721–725.
- Starkey J., Palmer H.C.* The sensitivity of the conglomerate test in paleomagnetism // Geophys. J.R. Astr. Soc. 1970. Vol. 22. P. 235–240.
- Tauxe L., Watson G.S.* The fold test: An eigen analysis approach // Earth Planet. Sci. Lett. 1994. Vol. 122. P. 331–341.
- Watson G.S.* A test for randomness of directions // Monthly Notices R. Astr. Soc., Geophys. Suppl. 1956. Vol. 7. P. 160–161.
- Watson G.S., Beran R.J.* Testing a sequence of unit vectors for randomness // J. Geophys. Res. 1967. Vol. 72. P. 5655–5659.
- Watson G.S., Enkin R.J.* The fold test in paleomagnetism as a parameter estimation problem // Geophys. Res. Lett. 1993. Vol. 20. P. 2135–2137.

Численное моделирование

- Мэйндоналд Дж.* Вычислительные алгоритмы в прикладной статистике. М.: Финансы и статистика, 1988. 352 с.
- Соболь И.М.* Метод Монте-Карло. М.: Наука, 1978. 64 с.

- Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.* Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980. 280 с.
- Эфрон Б.* Нетрадиционные методы многомерного статистического анализа. М.: Финансы и статистика, 1988. 262 с.
- Barnard G.A.* In discussion following a paper by Bartlett // J.R. Stat. Soc. 1963. Vol. 25B. P. 294.
- Fisher N.I., Hall P.* Bootstrap confidence regions for directional data // J. Am. Stat. Assoc. 1989. Vol. 84. P. 996–1002.
- Fisher N.I., Hall P.* New statistical methods for directional data – 1. Bootstrap comparison of mean directions and the fold test in palaeomagnetism // Geophys. J. Int. 1990. Vol. 101. P. 305–313.
- Marriott F.H.C.* Barnard's Monte Carlo tests: How many simulations? // Appl. Stat. 1979. Vol. 28. P. 75–77.
- Tauxe L., Kylstra N., Constable C.* Bootstrap statistics for paleomagnetic data // J. Geophys. Res. 1991. Vol. 96. P. 11723–11740.

Научное издание

Станислав Валерьевич Шипунов

**СТАТИСТИКА
ПАЛЕОМАГНИТНЫХ ДАННЫХ**

(Труды ГИН; Вып. 527)

Утверждено к печати
Редколлегией Геологического института РАН

Редактов *И.М. Ерофеева*

Набор и компьютерная верстка выполнены в Геологическом
институте РАН автором

Подписано к печати 04.02.2000.
Формат 60x90 1/16
Гарнитура Таймс. Печать офсетная.
Усл.печ.л. 5,0. Тираж 300 экз.

Издательство ГЕОС
Изд. Лицензия Л.Р. № 050112 от 09.03.95
125315, 1-й Амбулаторный пр., 7/3-114
Тел.: (095) 230-80-92
Факс: (095) 231-04-43